NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

OBRECHT

Interprétation géométrique du mouvement d'un solide autour d'un point fixe (cas général)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 531-534

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__531_0>

[R8aα]

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DU MOUVEMENT D'UN SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE (CAS GÉNÉRAL);

PAR M. OBRECHT,

Professeur à l'Université de Santiago (Chili).

Soient : O le point fixe; A, B, C les moments principaux d'inertie en O; ω l'axe de la rotation instantanée; p, q, r ses projections sur les axes principaux d'inertie; G l'axe du couple résultant des quantités de mouvement; E l'axe du couple résultant des forces extérieures, au point O; H la force vive du solide et $OM = \rho$ le rayon vecteur de l'ellipsoïde d'inertie, dirigé suivant ω.

On sait que les projections de G sur les axes principaux d'inertie sont Ap, Bq, Cr et que la force vive est

$$H = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2.$$

On a aussi la relation

$$\frac{1}{\rho} = \omega\sqrt{H}.$$

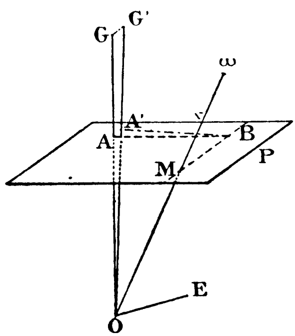
On sait, en outre, que le plan tangent à l'ellipsoïde d'inertie, au point M, est perpendiculaire à G. Soit h la distance de O à ce plan; on a

$$h = \frac{\rho H}{\omega G} = \frac{\sqrt{H}}{G}.$$

On déduit de cette équation

$$(1)\qquad dh = \frac{dH}{2G\sqrt{H}} - \frac{\sqrt{H}\,dG}{G^2}.$$

Dans la figure ci-dessous, P est le plan tangent à l'ellipsoïde en M; OC, OC' sont les axes du couple résultant des quantités de mouvement aux instants t et



$t + dt$; OE est l'axe du couple résultant des forces extérieures; AB est la trace du plan GOE sur le plan P, et MB est une perpendiculaire à cette trace, dans le plan P.

Comme la vitesse de G est égale à E, G' est parallèle à OE et l'on a $GG' = E\,dt$. Soit $GOG' = d\varepsilon$; on déduit de la figure

$$(2)\qquad \begin{cases} dG = E\,dt\cos(E, G), \\ G\,d\varepsilon = E\,dt\sin(E, G). \end{cases}$$

Pour calculer dH, il suffit d'observer que $\frac{1}{2}\,dH$ est égal au travail des forces extérieures pendant le temps dt; ce travail est égal au produit de l'angle de rotation, $\omega\,dt$, par la somme des moments des forces par rapport à l'axe ω, et cette dernière somme est égale à la projection de OE sur $O\omega$. On a donc

$$\tfrac{1}{2}\, dH = \omega\, dt\, E \cos(E, \omega).$$

Il résulte de là, d'après (1),

$$\begin{aligned} dh &= \frac{E\, dt}{G}\left[\frac{\omega}{\sqrt{H}}\cos(E, \omega) - \frac{\sqrt{H}}{G}\cos(E, G)\right] \\ &= \frac{E\, dt}{G}[\rho\cos(E, \omega) - h\cos(E, G)]. \end{aligned}$$

Or on déduit de la figure

$$\rho\cos(E, \omega) = H\cos(G, E) + AB\sin(G, E).$$

Donc

$$dh = \frac{E\, dt}{G} AB \sin(G, E),$$

ou bien, d'après la seconde équation (1),

$$dh = AB.dc.$$

Soit BA′ une perpendiculaire à OG′. La figure montre que OA′ représente la distance $h + dh$.

Or la position du plan P, à l'instant $t + dt$, est perpendiculaire sur OG′; donc cette position coupe la première suivant MB.

Il résulte de là que *le solide a un mouvement élémentaire de Poinsot, par rapport au plan* P *et que ce plan roule, en même temps, sur l'ellipsoïde d'inertie, en restant perpendiculaire à* G.

Le plan P reste invariable lorsque $E = 0$ — c'est le cas interprété par Poinsot — et aussi lorsque E a la direction de G.

Cette interprétation permet de simplifier la théorie du mouvement d'un solide autour d'un axe très voisin de l'axe principal, maximum ou minimum, et, en particulier, la théorie du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité.