NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Sujets d'exercices de calcul différentiel et intégral proposés aux candidats à l'agrégation

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 521-524

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__521_1>

SUJETS D'EXERCICES DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL PROPOSÉS AUX CANDIDATS A L'AGRÉGATION.

I.

1° *Déterminer les asymptotiques de la surface* (S) *représentée par les équations paramétriques*

$$x = a \sin u \times \operatorname{ch} v + bu,$$
$$y = b \cos u \times \operatorname{sh} v + av,$$
$$z = \sin u \times \operatorname{sh} v.$$

dans lesquelles a et b sont deux constantes. Quelles sont les génératrices de cette surface? Pour des valeurs convenables des constantes a et b, peut-elle être une surface réglée?

2° *Les axes coordonnés étant supposés rectangulaires, montrer qu'il est possible de choisir les constantes a et b de manière que la surface* (S) *soit rapportée à un réseau orthogonal* (u, v); (S) *est alors une surface minima dépendant de l'argument* α *de fonctions hyperboliques qui peuvent servir à exprimer simplement les constantes a et b. Quelles sont les lignes de courbure de cette surface minima* (S)?

3° *Rectifier une asymptotique de la surface minima* (S). *Montrer que toute asymptotique est une hélice tracée sur un cylindre du second degré dont on précisera la nature et les éléments.*

4° *Sur la surface minima* (S), *on envisage les lignes* (C) *le long desquelles les rayons de courbure principaux sont constants, calculer la torsion des asymptotiques pour les divers points d'une ligne* (C) *et, de ce calcul, déduire une nouvelle définition géométrique des lignes* (C).

Sur la surface minima (S), *déterminer les trajectoires orthogonales des lignes* (C).

5° *La surface minima* (S) *est représentée conformément sur le plan* (u, v); *le rectangle curviligne formé sur* (S) *par quatre asymptotiques est figuré, sur la carte, par un rectangle* (R), *rectiligne, fixe lorsque* α *varie.*

On se donne en position le rectangle (R) *de la carte; à toute valeur de* α, *on associe la valeur* S_α *de l'aire de la surface correspondante* (S) *qui est figurée sur la carte par le rectangle* (R) : *on propose de déterminer, en fonction des quatre nombres qui repèrent les côtés du rectangle, l'argument* α *de manière que l'aire associée* S_α *soit minimum; calculer le minimum correspondant* S_0.

Ce minimum S_0 *peut-il, pour un choix convenable du rectangle* (R), *être égal à l'aire de ce même rectangle* (R)?

II.

a, b, c, A, B, C *sont six fonctions d'un même paramètre* t, *dont les dérivées respectives sont désignées par* a', b', c', A', B' *et* C'. *L'équation*

$$ax + by + c = \sin(Ax + By + C)$$

représente une famille de courbes (S).

1° *Déterminer les points d'inflexion de la courbe* (S_0) *qui correspond à une valeur particulière* t_0 *du paramètre* t. *Quels sont les lieux des points d'inflexion des courbes* (S) *lorsque* t *varie? Examiner le cas particulier pour lequel*

$$\frac{a}{A'} = \frac{b}{B'} = \frac{c}{C'}.$$

2° *Soit* I_1 *l'un des points d'inflexion et soit* (Γ_1) *le lieu de ce point* I_1. *Sous quelle condition la courbe* (Γ_1) *appartiendra-t-elle à l'enveloppe des courbes* (S), *le point de contact entre l'enveloppe et cette partie de l'enveloppe étant toujours un point d'inflexion* I_1 *de l'enveloppe* (S)?

3° *Les points d'inflexion de* (S) *étant supposés numérotés dans leur ordre de succession sur* (S), *montrer qu'ils se répartissent en deux groupes, le groupe des points de numéros pairs et le groupe des points de numéros impairs, qui jouissent chacun de la propriété suivante : si les lieux* (Γ_i) *et* (Γ_j) *de deux points d'inflexion d'un même groupe appartiennent à l'enveloppe, il en est de même de tous les points d'inflexion du même groupe. Donner des expressions générales, indépendantes de tout signe de quadrature, des six fonctions* $a, \ldots, C$, *lorsque cette circonstance se produit pour* un *groupe.*

4° *Les conditions précédentes sont supposées remplies; peut-on choisir convenablement les six fonctions pour que le lieu de l'un (ou les lieux de plusieurs) des points d'inflexion de l'autre groupe appartienne (ou appartiennent) aussi à l'enveloppe?*

Plus particulièrement encore, est-il possible de prendre pour les six fonctions a, b, c, A, B *et* C *des expressions d'un paramètre* t *telles que, tous les lieux des points d'inflexion des deux groupes étant supposés appartenir à l'enveloppe des courbes correspondantes* (S), *celle-ci soit uniquement constituée par ces différents lieux?*

III.

Les axes coordonnés $Oxyz$ *sont rectangulaires.*

I. *Étant donnée une surface* (S), *montrer qu'il existe* en général *un système de courbes* (C), *conjuguées sur la surface* (S), *et qui sont orthogonales en projection sur le plan* Oxy. *Il y a cependant exception pour certaines surfaces particulières* (S_0) *que l'on caractérisera. — Déterminer ce système de courbes conjuguées lorsque la surface* (S) *est une quadrique admettant le plan* Oxy *pour plan principal de symétrie.*

II. *Soient* M *un point quelconque de la surface* (S), m *sa projection sur* Oxy, d *la parallèle menée par* m *à la normale en* M *à la surface* (S). *A toute surface* (S) *donnée qui n'est pas une surface* (S_0), *est ainsi associée une certaine congruence de droites* $[d]$. *Démontrer qu'il y a équivalence entre la détermination des courbes* (C), *sur* (S) *et la détermination des développables de la congruence* $[d]$.

III. *Déterminer les surfaces* (S) *associées ainsi à des congruences de normales, déterminer alors les surfaces qui sont orthogonales aux droites d'une telle congruence de normales et, sur une de ces dernières surfaces, déterminer ses lignes de courbure; sur une surface* (S) *correspondante, définir géométriquement les courbes* (C).

Vérifier que, dans ce cas, la surface (S) *est intégrale d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre et qui dépend d'une fonction arbitraire; sur l'intégrale* (S), *les courbes caractéristiques de cette équation sont des courbes* (C). *A quel caractère reconnaîtra-t-on, d'une façon générale, qu'étant donnée une équation de premier ordre, les caracteristiques sur une intégrale générale sont toujours des courbes* (C) *de cette surface?*

IV. *En revenant au cas général, former l'équation des points focaux sur chaque rayon de la congruence. Quelle est l'équation générale des surfaces* (S) *associées à une congruence* $[d]$ *pour chaque rayon de laquelle un point focal est à l'infini ou dans un plan parallèle à* Oxy *donné?*

Quelles sont les surfaces (S) *à des congruences* $[d]$ *qui admettent le plan* Oxy *pour surface centrale (lieu du milieu du segment focal)? Démontrer que la surface générale* (S_1) *ainsi obtenue est la surface la plus générale dont les lignes asymptotiques se projettent sur* Oxy *suivant un réseau orthogonal; sur une surface* (S_1), *déterminer les asymptotiques et les courbes* (C).

V. *Étudier le cas où* (S_1) *est une surface d'équations :*

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = A r^k \sin K\theta$$

(A *et* K *sont deux constantes*). *Lorsque* A *varie, déterminer les courbes et les surfaces trajectoires arthogonales de* (S_1); *parmi ces surfaces trajectoires, il existe une infinité de quadriques que l'on définira géométriquement. Est-il possible ou non de déterminer un système triple-orthogonal de surfaces qui comprenne les surfaces précédentes* (S_1)? (Poitiers 1912.)