

J. LEMAIRE

**Agrégation des sciences mathématiques ;  
concours de 1914. Solution de la question  
de mathématiques élémentaires**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 14  
(1914), p. 489-505

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1914\\_4\\_14\\_\\_489\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__489_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1914, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES; CONCOURS  
DE 1914. SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMA-  
TIQUES ÉLÉMENTAIRES;

PAR M. J. LEMAIRE,  
Professeur au Lycée Janson-de-Sailly.

---

*Soient  $A_1, A_2, A_3, A_4$  les quatre sommets d'un tétraèdre  $T$ . Représentons par  $a_{ij}$  la longueur de l'arête  $A_iA_j$  et par  $O_{ij}$  le milieu de cette arête. Représentons aussi par  $(A, B)$  la sphère décrite sur un segment quelconque  $AB$  comme diamètre.*

*I. Calculer l'un des produits géométriques <sup>(1)</sup> de*

---

<sup>(1)</sup> On rappelle que le produit géométrique de deux vecteurs  $\overline{AB}$  et  $\overline{CD}$  est le produit des longueurs de ces vecteurs et du cosinus de leur angle.

deux arêtes opposées de  $T$  en fonction des longueurs des arêtes de ce tétraèdre. Trouver la relation qui existe entre les produits relatifs aux trois couples d'arêtes opposées.

II. Trouver la relation qui doit exister entre les longueurs des arêtes de  $T$  pour que les deux droites  $O_{12}O_{34}$  et  $O_{13}O_{24}$  soient rectangulaires.

III. Soit  $d$  la distance des plans radicaux de chacune des sphères  $(A_1, A_2)$ ,  $(A_3, A_4)$  et de la sphère  $(O_{12}, O_{34})$ . Soient  $d'$  et  $d''$  les distances analogues correspondantes aux deux autres couples d'arêtes opposées du tétraèdre. On demande de trouver les relations qui doivent exister entre les longueurs de ces arêtes pour qu'on ait  $d = d' = d''$ . Trois sommets d'un pareil tétraèdre étant donnés, on demande de trouver le lieu géométrique du quatrième sommet. Discuter.

IV. Étant donné un point quelconque  $M$ , on mène les deux bissectrices de l'angle  $\widehat{A_iMA_j}$ . Soit  $\omega_{ij}$  le milieu du segment découpé par ces bissectrices sur la droite  $A_iA_j$ ; il y a six points  $\omega_{ij}$ . Démontrer que ces six points sont dans un même plan  $\Pi$  qu'on peut associer au point  $M$ . Inversement, un plan  $\Pi$  quelconque étant donné, on peut lui faire correspondre de cette façon deux points  $M$  et  $M'$  qui sont eux-mêmes associés. Quelle position faut-il donner au plan  $\Pi$  pour que les deux points  $M$  et  $M'$  correspondants soient confondus? Comment se déplace le plan  $\Pi$  lorsqu'un point  $M$  correspondant décrit un cercle dont le plan passe par le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre?

V. Un tétraèdre T étant donné, construire un point  $M_0$  confondu avec son associé et situé à la même distance des trois sommets  $A_1, A_2, A_3$ . Trouver la surface S lieu du sommet  $A_4$  lorsque T se déforme,  $A_1, A_2, A_3$  restant fixes et le rapport  $\frac{M_0 A_4}{M_0 A_1}$  conservant une valeur constante  $k$ . Soit D une droite quelconque passant par  $A_1$ . Construire les points de rencontre de D et de S. Trouver le lieu des droites D tangentes à S, et le lieu du point de contact.

I. Nous emploierons la notation suivante qui nous paraît plus commode que celle de l'énoncé : nous appellerons ABCD le tétraèdre T;  $b, c, d$  les longueurs des arêtes AB, AC, AD issues de A, et  $\beta, \gamma, \delta$  celles des arêtes opposées. Construisons le parallélogramme  $BD'CD$ , dont les diagonales se coupent en I, nous pouvons écrire

$$\overline{AD'}^2 + d^2 = 2\overline{AI}^2 + 2\overline{ID}^2,$$

$$2\overline{AI}^2 + \frac{\delta^2}{2} = b^2 + c^2,$$

$$2\overline{ID}^2 + \frac{\delta^2}{2} = \beta^2 + \gamma^2;$$

d'où, par addition,

$$\overline{AD'}^2 + d^2 + \delta^2 = b^2 + c^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

ou

$$b^2 + \beta^2 - 2b\beta \cos(\widehat{AB, CD}) + d^2 + \delta^2 = b^2 + c^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

d'où

$$b\beta \cos(\widehat{AB, CD}) = \frac{1}{2} (d^2 + \delta^2 - c^2 - \gamma^2).$$

On aurait de même,

$$c\gamma \cos(\widehat{AC, DB}) = \frac{1}{2}(b^2 + \beta^2 - d^2 - \delta^2),$$

$$d\delta \cos(\widehat{AD, BC}) = \frac{1}{2}(c^2 + \gamma^2 - b^2 - \beta^2).$$

Par conséquent

$$b\beta \cos(\widehat{AB, CD}) + c\gamma \cos(\widehat{AC, DB}) + d\delta \cos(\widehat{AD, BC}) = 0.$$

Ainsi la somme des produits géométriques relatifs aux trois couples d'arêtes opposées est nulle. On conclut aussi de ces relations les propriétés suivantes :

1° *Pour que deux arêtes opposées d'un tétraèdre soient orthogonales, il faut et il suffit que la somme des carrés soit la même pour les deux autres couples d'arêtes opposées ;*

2° *Si les arêtes de deux groupes d'arêtes opposées sont orthogonales, il en est de même des arêtes du troisième groupe ;*

3° *Dans un tétraèdre à arêtes opposées orthogonales, on a*

$$b^2 + \beta^2 = c^2 + \gamma^2 = d^2 + \delta^2,$$

*et réciproquement.*

II. Appelons  $O_b, O_c, O_d$  les milieux des arêtes  $AB, AC, AD$  et  $O'_b, O'_c, O'_d$  ceux des arêtes opposées  $CD, DB, BC$ . Pour que  $O_bO'_b$  et  $O_cO'_c$  soient rectangulaires, il faut et il suffit que le parallélogramme  $O_bO_cO'_bO'_c$  soit un losange, c'est-à-dire que  $O_bO_c = O'_bO'_c$ , ou  $\frac{BC}{2} = \frac{AD}{2}$ , ou  $d = \delta$ . Ainsi, pour que les droites joignant les milieux des arêtes opposées de deux couples de telles arêtes soient rectangulaires, il faut et il suffit que les arêtes du troisième couple soient égales.

Donc si les arêtes opposées d'un tétraèdre sont égales deux à deux, l'octaèdre qui a pour sommets les points  $O_b, \dots, O'_d$  a ses diagonales rectangulaires deux à deux; la réciproque est vraie.

III. Les sphères (A, B), (C, D),  $(O_b, O'_b)$  ont leurs centres  $O_b, O'_b, \omega$ , en ligne droite; appelons  $l$  la distance des plans radicaux de la troisième associée successivement à chacune des deux autres, nous pouvons écrire

$$l = O_b O'_b - \frac{b^2 + \beta^2}{4 O_b O'_b}.$$

Mais le triangle  $O_b O_c O'_b$  donne

$$\begin{aligned} \overline{O_b O'_b}^2 &= \overline{O_b O_c}^2 + \overline{O'_b O_c}^2 - 2 O_b O_c \cdot O'_b O_c \cos(\widehat{O_b O_c, O'_b O_c}) \\ &= \frac{\delta^2 + d^2}{4} - \frac{d\delta}{2} \cos(\widehat{BC, DA}) \end{aligned}$$

et, en appliquant une formule obtenue plus haut,

$$\begin{aligned} \overline{O_b O'_b}^2 &= \frac{\delta^2 + d^2}{4} - \frac{d\delta}{2} \frac{b^2 + \beta^2 - c^2 - \gamma^2}{2d\delta} \\ &= \frac{c^2 + d^2 + \gamma^2 + \delta^2 - b^2 - \beta^2}{4}, \end{aligned}$$

d'où

$$l = \frac{c^2 + d^2 + \gamma^2 + \delta^2 - 2b^2 - 2\beta^2}{2\sqrt{c^2 + d^2 + \gamma^2 + \delta^2 - b^2 - \beta^2}}.$$

Posant  $k^2 = b^2 + c^2 + d^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$ , nous avons

$$l^2 = \frac{[k^2 - 3(b^2 + \beta^2)]^2}{4[k^2 - 2(b^2 + \beta^2)]};$$

$l'^2$  et  $l''^2$  auraient des expressions analogues; si nous écrivons que  $l^2 = l'^2$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} &[k^2 - 3(b^2 + \beta^2)]^2 [k^2 - 2(c^2 + \gamma^2)] \\ &- [k^2 - 3(c^2 + \gamma^2)]^2 [k^2 - 2(b^2 + \beta^2)] = 0 \end{aligned}$$

ou

$$(b^2 + \beta^2 - c^2 - \gamma^2)[4k^4 - 9(b^2 + \beta^2 + c^2 + \gamma^2)k^2 + 18(b^2 + \beta^2)(c^2 + \gamma^2)] = 0.$$

Les conditions  $l'^2 = l''^2$ ,  $l''^2 = l^2$  donneraient de même

$$(c^2 + \gamma^2 - d^2 - \delta^2)[4k^4 - 9(c^2 + \gamma^2 + d^2 + \delta^2)k^2 + 18(c^2 + \gamma^2)(d^2 + \delta^2)] = 0,$$

$$(d^2 + \delta^2 - b^2 - \beta^2)[4k^4 - 9(d^2 + \delta^2 + b^2 + \beta^2)k^2 + 18(d^2 + \delta^2)(b^2 + \beta^2)] = 0.$$

Appelant  $\Delta$ ,  $\Delta'$ ,  $B$ ,  $B'$ ,  $\Gamma$ ,  $\Gamma'$  les facteurs des premiers membres de ces conditions, qui se réduisent à deux distinctes, nous les écrivons

$$(1) \quad \Delta\Delta' = 0,$$

$$(2) \quad BB' = 0,$$

$$(3) \quad \Gamma\Gamma' = 0.$$

Les deux premières sont vérifiées dans les quatre hypothèses :

$$(4) \quad \begin{cases} \Delta = 0, \\ B = 0; \end{cases} \quad (5) \quad \begin{cases} \Delta = 0, \\ B' = 0; \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} \Delta' = 0, \\ B = 0; \end{cases} \quad (7) \quad \begin{cases} \Delta' = 0, \\ B' = 0. \end{cases}$$

Les égalités (4) entraînent  $\Gamma = 0$ , puisque

$$B + \Gamma + \Delta = 0.$$

Les égalités (5) entraînent  $\Gamma' = 0$ , car

$$B' - \Gamma' = 9\Delta(b^2 + \beta^2 + c^2 + \gamma^2 - d^2 - \delta^2).$$

Les égalités (6) entraînent de même  $\Gamma' = 0$ , à cause de

$$\Gamma' - \Delta' = 9B(c^2 + \gamma^2 + d^2 + \delta^2 - b^2 - \beta^2).$$

Enfin, les égalités (7) entraînent  $\Gamma = 0$ , à cause de

$$\Delta' - B' = 9\Gamma(d^2 + \delta^2 + b^2 + \beta^2 - c^2 - \gamma^2)$$

et de l'inégalité

$$d^2 + \delta^2 + b^2 + \beta^2 - c^2 - \gamma^2 > 0,$$

vraie pour un quadrilatère plan autre qu'un parallélogramme, et à plus forte raison pour un quadrilatère gauche de côtés  $d, \delta, b, \beta$ , et de diagonales  $c$  et  $\gamma$ .

Nous constatons bien que (3) est une conséquence de (1) et de (2).

Les relations (4) qui s'écrivent

$$b^2 + \beta^2 = c^2 + \gamma^2 = d^2 + \delta^2,$$

sont satisfaites quand le tétraèdre est orthocentrique, et seulement dans ce cas.

Considérons les conditions (5), qui ont pour conséquence  $\Gamma' = 0$ ; la condition  $B' = 0$  s'écrit :

$$\begin{aligned} &4(b^2 + \beta^2 + c^2 + \gamma^2 + d^2 + \delta^2)^2 \\ &- 9(c^2 + \gamma^2 + d^2 + \delta^2)(b^2 + \beta^2 + c^2 + \gamma^2 + d^2 + \delta^2) \\ &+ 18(c^2 + \gamma^2)(d^2 + \delta^2) = 0 \end{aligned}$$

ou, en tenant compte de  $\Delta \equiv b^2 + \beta^2 - c^2 - \gamma^2 = 0$ ,

$$- 2(c^2 + \gamma^2)^2 - 5(d^2 + \delta^2)^2 + 7(c^2 + \gamma^2)(d^2 + \delta^2) = 0$$

ou

$$(8) \quad (c^2 + \gamma^2 - d^2 - \delta^2)[2(c^2 + \gamma^2) - 5(d^2 + \delta^2)] = 0.$$

Si le premier facteur B est nul, on a

$$\Delta = B = \Gamma = 0;$$

le tétraèdre est orthocentrique.

Pour un tel tétraèdre, les distances  $l, l', l''$  sont nulles, les sphères ayant pour diamètres les arêtes opposées sont deux à deux orthogonales et réciproquement.

Trois des sommets B, C, D étant fixes, le lieu du



quatrième est la perpendiculaire menée au plan des trois premiers par l'orthocentre du triangle qu'ils forment.

Annulant le second facteur du premier membre de (8), nous voyons que les conditions (5) sont encore satisfaites lorsque

$$\begin{aligned} b^2 + \beta^2 - c^2 - \gamma^2 &= 0, \\ 2(c^2 + \gamma^2) - 5(d^2 + \delta^2) &= 0. \end{aligned}$$

Les sommets B, C, D restant fixes, et par suite  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  étant constants, la première condition définit le plan perpendiculaire au plan BCD et passant par la hauteur du triangle issue de D, la seconde définit une sphère ayant son centre sur CD et dont on aurait aisément les éléments; le lieu correspondant du quatrième sommet est le cercle commun à ce plan et à cette sphère.

La considération des conditions (6) et (7) conduirait à deux cercles analogues.

IV. M étant un point quelconque de l'espace, soit  $\omega_{ab}$  le milieu de la distance des traces sur AB des bissectrices de  $\widehat{AMB}$ ; on établit très facilement que  $\omega_{ab}M$  est tangent au cercle MAB, de sorte que

$$\overline{\omega_{ab}M}^2 = \omega_{ab}A \times \omega_{ab}B,$$

égalité qui exprime que  $\omega_{ab}$  a même puissance par rapport à la sphère-point M et à la sphère, de centre  $\Omega$ , circonscrite au tétraèdre T; par suite, *les six points tels que  $\omega_{ab}$  sont dans un même plan  $\Pi$  qui est le plan radical de ces deux sphères, plan équidistant de M et du plan polaire de M par rapport à la sphère  $\Omega$ ; ils sont les sommets d'un quadrilatère complet.*

A tout point  $M$  correspond ainsi un plan  $\Pi$ , unique et bien déterminé; à deux points  $M$  et  $M'$  inverses par rapport à la sphère, correspond le même plan  $\Pi$  perpendiculaire à  $MM'$  en son milieu.

Inversement, un plan  $\Pi$  quelconque étant donné, on peut lui faire correspondre deux points  $M$  et  $M'$ , qui sont les points-limites du faisceau de sphères défini par la sphère  $\Omega$  et le plan  $\Pi$ .

Pour que les points associés  $M$  et  $M'$  coïncident, il faut et il suffit qu'ils soient sur la sphère, c'est-à-dire que le plan  $\Pi$  soit *tangent à cette sphère*  $\Omega$ .

Si  $M$  décrit une figure, courbe ou surface,  $M'$  décrit la figure inverse par rapport à la sphère. Supposons en particulier que  $M$  décrive un cercle  $S$  dans un plan contenant le centre  $\Omega$  de la sphère circonscrite au tétraèdre  $T$ ,  $M'$  décrit le cercle  $S'$  ou la droite inverse de  $S$  par rapport à  $\Omega$ , la puissance d'inversion étant le carré  $R^2$  du rayon de la sphère.

Si  $\Omega$  est *extérieur au cercle*  $S$ , ce point est le centre d'homothétie directe des cercles  $S$  et  $S'$ , les droites joignant aux centres deux points associés  $M$  et  $M'$  ont un point commun  $P$  placé de la même manière à la fois, sur ces droites, par rapport aux rayons  $SM$  et  $S'M'$ ; le triangle  $PMM'$  est isocèle, et la *différence* des longueurs  $PS$  et  $PS'$  est égale à celle des rayons des cercles  $S$  et  $S'$ , et réciproquement. Par conséquent, le lieu de  $P$  est, dans l'hypothèse actuelle, l'*hyperbole* de foyers  $S$  et  $S'$  qui passe aux points à distance finie communs aux deux cercles.

La trace du plan  $\Pi$  sur le plan du cercle donné, étant perpendiculaire à  $MM'$  en son milieu, est tangente en  $P$  à l'hyperbole; *l'enveloppe de ce plan  $\Pi$  est donc le cylindre droit ayant cette hyperbole pour directrice.*

Si  $\Omega$  est intérieur au cercle  $S$ , ce point est le centre d'homothétie inverse des cercles  $S$  et  $S'$ , le point  $P$  commun aux droites  $SM$  et  $S'M'$  appartient à l'un des rayons et au prolongement de l'autre; le triangle  $PMM'$  est isocèle, la somme des longueurs  $PS$  et  $PS'$  est égale à celle des rayons des cercles  $S$  et  $S'$ , et réciproquement. Par conséquent, le lieu de  $P$  est alors l'ellipse de foyers  $S$  et  $S'$  qui passe aux points à distance finie communs aux deux cercles.

La trace du plan  $\Pi$  sur le plan du cercle donné est tangente en  $P$  à l'ellipse, et l'enveloppe de ce plan  $\Pi$  est dans ce cas le cylindre droit ayant cette ellipse pour directrice.

Si enfin  $\Omega$  est sur le cercle  $S$ , le lieu de  $M'$  est une droite  $S'$  perpendiculaire à  $\Omega S$ , du même côté que  $S$  par rapport à  $\Omega$ , la droite  $SM$  rencontre en  $P$  la perpendiculaire en  $M'$  à  $S'$ , le triangle  $PMM'$  est isocèle et a pour base  $MM'$  comme dans les cas précédents, le lieu de  $P$  est la parabole de foyer  $S$  dont la directrice est la parallèle  $S''$  à  $S'$  à une distance de cette droite égale au rayon du cercle  $S$ ,  $\Omega$  et  $S''$  étant de part et d'autre de  $S'$ .

La trace de  $\Pi$  sur le plan du cercle donné est tangente en  $P$  à la parabole, et l'enveloppe de ce plan  $\Pi$  est dans ce cas particulier le cylindre droit ayant cette parabole pour directrice.

V. Un tétraèdre  $T$ ,  $ABCD$ , étant donné, pour qu'un point  $M_0$  coïncide avec son associé et soit équidistant de trois sommets  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , il faut et il suffit que ce point soit confondu avec l'un ou l'autre des points où l'axe du cercle  $ABC$  coupe la sphère circonscrite à  $T$ , points qui sont les pôles de ce cercle sur cette sphère.

Le lieu géométrique du quatrième sommet  $D$ ,

quand T se déforme, A, B, C, et par suite le cercle passant par ces points, restant fixes, et le rapport  $\frac{M_0 D}{M_0 A}$  conservant une valeur constante  $k$ , est de révolution autour de l'axe  $z'z$  du cercle, et sa méridienne peut être définie comme il suit : un cercle variable passe par deux points fixes A et A' symétriques par rapport à une droite  $z'z$ ,  $M_0$  est l'un des points communs à ce cercle et à cette droite, la méridienne de la surface cherchée S est le lieu du point D du cercle tel que

$$M_0 D = k \cdot M_0 A.$$

Posons  $AA' = 2a$ , et supposons d'abord  $k > 1$ ,  $M_0$  et D sont de part et d'autre de  $AA'$  et le théorème de Ptolémée appliqué au quadrilatère  $AM_0 A' D$  donne

$$M_0 A \cdot DA' + M_0 A' \cdot DA = M_0 D \cdot AA'$$

ou, en remplaçant  $M_0 D$  par  $k \cdot M_0 A$ , et observant que  $M_0 A = M_0 A'$ ,

$$DA + DA' = 2ka.$$

La méridienne de S est donc une ellipse de foyers A et A', et d'axe focal  $2ka$ ; la surface S est un ellipsoïde de révolution aplati.

Si  $k < 1$ ,  $M_0$  et D sont du même côté par rapport à  $AA'$ , et le théorème de Ptolémée donne

$$M_0 A \cdot DA' - M_0 A' \cdot DA = \pm M_0 D \cdot AA'$$

ou

$$DA' - DA = \pm 2ka.$$

La méridienne est alors une hyperbole de foyers A et A', d'axe focal  $2ka$ , et la surface S est un hyperboloïde de révolution à une nappe.

La recherche des points de rencontre de S et d'une droite quelconque est une question traitée dans les

cours de Géométrie descriptive, que la surface soit un ellipsoïde ou un hyperboloïde de révolution.

Il n'existe de droites D tangentes à S et passant par A que dans le deuxième cas : A étant un foyer de S, le lieu des tangentes issues de ce point est un cône de révolution, et le lieu du point de contact est l'hyperbole intersection de S et du plan perpendiculaire à celui du cercle de gorge mené par la polaire de A par rapport à ce cercle.

Ces résultats peuvent être établis d'une façon élémentaire (*fig. 1*) : soient (H) l'hyperbole méridienne de S de foyers A et A', O son centre, EE' le diamètre du cercle de gorge perpendiculaire à AA', OL une asymptote de (H), EL' la parallèle menée par E à cette asymptote ; L, L' et O' les points où ces droites et l'axe sont coupés par un plan perpendiculaire à cet axe  $z z'$  : le triangle rectangle O'LL' donne

$$\overline{O'L}^2 - \overline{O'L'}^2 = \overline{LL'}^2 = \overline{OE}^2.$$

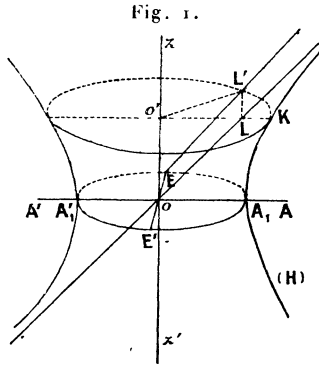
D'autre part, si O'K est le rayon du parallèle de S appartenant au plan considéré, une propriété connue de l'hyperbole permet d'écrire

$$\overline{O'K}^2 - \overline{O'L}^2 = \overline{OA_1}^2,$$

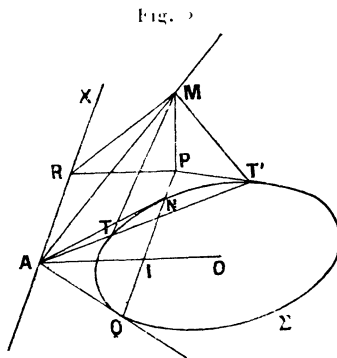
A<sub>1</sub>A'<sub>1</sub> étant l'axe transverse de (H) ; comme OE = OA<sub>1</sub>, on a O'L = O'K, d'où il résulte que S peut être engendrée par la révolution autour de  $z z'$  de la parallèle menée par E à l'une ou l'autre des asymptotes de (H).

Ceci posé, soient  $\Sigma$  (*fig. 2*) le cercle de gorge de S, M le point de contact d'une tangente à S issue de A ; T et T' les points où les génératrices de S passant en M rencontrent  $\Sigma$  ; TT', trace sur le plan de  $\Sigma$  du plan tangent

en  $M$ , passe en  $A$ ; si  $P$  est la projection de  $M$  sur ce plan,  $PT$  et  $PT'$  sont tangentes à  $\Sigma$ , de sorte que  $P$



appartient à la polaire de  $A$  par rapport au cercle de gorge. Menons la parallèle  $AX$  à cette droite, et la



perpendiculaire  $MR$  à  $AX$ ;  $PR$  est aussi perpendiculaire à  $AX$ . Si  $\alpha$  désigne l'angle  $\widehat{AOL}$ , nous pouvons écrire

$$\widehat{MTP} = \widehat{ANI} = \alpha.$$

$N$  et  $Q$  étant les points de contact des tangentes

menées de A à  $\Sigma$ , et I le milieu de la corde NQ; la figure donne alors

$$\begin{aligned}\overline{MR}^2 &= \overline{MP}^2 + \overline{PR}^2 = \overline{PT}^2 \operatorname{tang}^2 \alpha + \overline{AI}^2 \\ &= (\overline{PI}^2 - \overline{IN}^2) \operatorname{tang}^2 \alpha + \overline{AI}^2 = \overline{PI}^2 \operatorname{tang}^2 \alpha = \overline{AR}^2 \operatorname{tang}^2 \alpha.\end{aligned}$$

L'angle  $\widehat{MAX}$  est donc égal à  $\alpha$ , et le lieu de AM est le cône de révolution ayant AX pour axe, et  $\alpha$  pour demi-angle au sommet.

D'ailleurs, la relation

$$\overline{MP}^2 = \overline{PT}^2 \operatorname{tang}^2 \alpha = \text{PN} \cdot \text{PQ} \operatorname{tang}^2 \alpha$$

montre que le lieu du point de contact M est une hyperbole, semblable à (H), de sommets N et Q, et située dans un plan perpendiculaire au plan de  $\Sigma$ .

*Remarque.* — Nous avons vu que, si les arêtes opposées d'un tétraèdre sont égales, les droites qui joignent les milieux de ces arêtes sont deux à deux rectangulaires, et réciproquement. Voici d'autres propriétés de ces tétraèdres que nous appellerons les tétraèdres  $\Theta$ :

Dans un tétraèdre  $\Theta$ , les faces sont des triangles égaux, les trièdres sont égaux, les hauteurs sont égales. les dièdres opposés sont égaux, les médianes sont égales, ainsi que les droites joignant les sommets aux orthocentres des faces opposées.

Chacune des trois droites joignant les milieux de deux arêtes opposées est un axe de symétrie pour  $\Theta$ , et la perpendiculaire commune aux arêtes correspondantes.

Ces droites ont le même milieu O, qui est à la fois le centre de gravité et le centre de la sphère circon-

scrite au tétraèdre, de la sphère inscrite, de l'hyperboloïde des hauteurs.

La somme algébrique des coordonnées de tout point de l'espace rapporté au tétraèdre est égale à la hauteur  $h$  du tétraèdre.

Le rayon de la sphère inscrite est égal à  $\frac{h}{4}$ ; les sphères ex-inscrites sont égales, leur rayon vaut  $\frac{h}{2}$ , leurs centres sont les points de la sphère circonscrite diamétralement opposés aux sommets du tétraèdre; chacune d'elles touche la face correspondante en son orthocentre.

Il n'existe pas, dans les combles constitués par les plans qui forment le tétraèdre, de sphères tangentes à ces plans.

Si le centre de gravité d'un tétraèdre et le centre de la sphère circonscrite coïncident, les arêtes opposées sont égales.

Le centre de gravité  $O$  d'un tétraèdre  $\Theta$  est équidistant des hauteurs.

Le volume d'un tel tétraèdre a pour carré

$$\frac{1}{72} (b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2).$$

Les angles des faces sont tous aigus.

La somme des cosinus des dièdres différents est égale à l'unité.

Le plan bissecteur d'un dièdre passe au milieu de l'arête opposée à celle du dièdre.

Les angles que font deux arêtes opposées avec les plans des faces qu'elles joignent sont égaux.

Si deux faces sont rabattues sur un même plan, de part et d'autre de leur arête commune, elles forment un parallélogramme; deux sommets quelconques se



projettent sur l'arête qui joint les deux autres à égale distance du milieu de cette arête; le pied de la hauteur issue d'un sommet et l'orthocentre de la face opposée à ce sommet sont symétriques par rapport au centre du cercle circonscrit à cette face.

L'hyperboloïde des hauteurs est coupé par les plans des faces suivant des hyperboles équilatères égales.

Si sur les hauteurs, à partir des sommets, et vers les faces opposées, on porte des longueurs égales  $A\alpha$ ,  $B\beta$ ,  $C\gamma$ ,  $D\delta$ , le tétraèdre  $\alpha\beta\gamma\delta$  est un tétraèdre  $\Theta$  et a même centre de gravité  $O$  que  $ABCD$ ; cela s'applique en particulier au tétraèdre ayant pour sommets les pieds des hauteurs, ou les seconds points de rencontre des hauteurs avec la sphère circonscrite, ou les projections de  $O$  sur les hauteurs, d'où il résulte que l'hyperboloïde des hauteurs n'est pas de révolution.

Le tétraèdre ayant pour sommets les orthocentres des faces a ses arêtes opposées égales, et admet  $O$  pour centre de gravité.

Toute droite joignant les milieux des deux arêtes opposées fait des angles égaux avec deux arêtes opposées n'ayant pas leurs milieux sur elles, et aussi avec deux hauteurs issues des sommets d'une des deux premières arêtes.

Toute droite pareille est un axe de l'hyperboloïde des hauteurs.

Les vecteurs formés par les hauteurs  $(AA')$ ,  $(BB')$ ,  $(CC')$ ,  $(DD')$  forment un système nul.

Les hyperboloïdes lieux des arêtes des dièdres droits dont les faces contiennent deux arêtes opposées ont mêmes axes que l'hyperboloïde des hauteurs, et passent par une même biquadratique gauche.

Le parabololoïde défini par le quadrilatère gauche que forment deux groupes d'arêtes opposées est équi-

latère, et a pour axe la droite qui joint les milieux des deux autres arêtes; O est le sommet commun aux trois pareils paraboloides.

Si l'on prolonge chaque hauteur d'une longueur égale à sa moitié au delà de son pied, on obtient un point de la sphère circonscrite.

Les droites qui joignent les milieux des hauteurs et les orthocentres des faces correspondantes sont égales, et ont leur milieu en O, qui est ainsi le centre d'une sphère contenant les orthocentres des faces, les pieds des hauteurs et leurs milieux.