NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. LEMAIRE

Sur un lieu géométrique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 446-456

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__446_1>

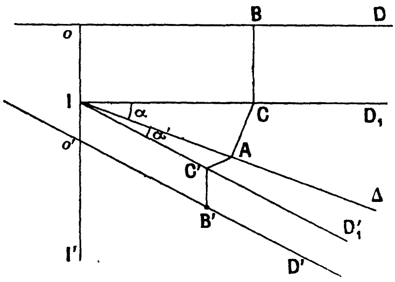
[K13a]

SUR UN LIEU GÉOMÉTRIQUE;

PAR M. J. LEMAIRE,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

Proposons-nous d'étudier le lieu des points dont le rapport des distances à deux droites D et D', non en même plan, a une valeur donnée k, que nous pouvons supposer plus grande que l'unité : soient OO' la perpendiculaire commune à ces droites, I et I' les points de OO' tels que

Fig. 1.



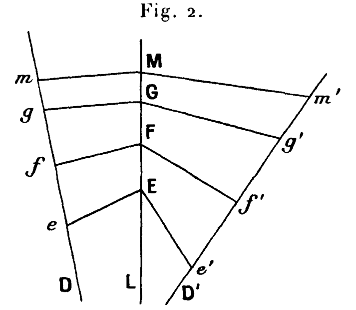
$$\frac{\mathrm{IO}}{\mathrm{IO'}} = \frac{\mathrm{I'O}}{\mathrm{I'O'}} = k \quad (\textit{fig. } 1),$$

P et P′ les plans parallèles aux droites données et passant en I et I′, A un point de P tel que $\frac{AB}{AB'} = k$, AB et AB′ étant perpendiculaires à D et à D′. Menant AC et AC′ perpendiculaires aux parallèles ID_1 et ID'_1 à D et D′, et remarquant que CB et C′B′ sont perpendiculaires à D et D′, nous voyons que $\frac{CB}{C'B'} = k$, de sorte que les triangles rectangles ABC et AB′C′ sont semblables et donnent $\frac{AC}{AC'} = k$. Inversement, si pour un point A du plan P cette dernière relation est vérifiée, ce point fait partie du lieu.

Le lieu cherché, que nous appellerons la surface (S), est donc coupé par le plan P suivant deux droites $I\Delta$ et $I\Delta_1$ conjuguées harmoniques par rapport à D_1 et D'_1, l'une d'elles Δ faisant avec D_1 et D'_1 des angles α et α' liés par la relation $\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = k$. Le plan P′ le coupe suivant les parallèles $I'\Delta'$ et $I'\Delta'_1$ aux droites précédentes.

Ceci posé, montrons que *si trois points du lieu* E, F, G, *appartiennent à une droite* L, *celle-ci fait*

Fig. 2.



partie du lieu : soient Ee, Ff, Gg et Ee', Ff', Gg' les distances de ces points à D et D′, de sorte que

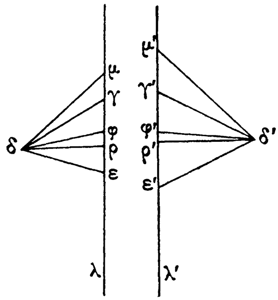
$$\frac{Ee}{Ee'} = \frac{Ff}{Ff'} = \frac{Gg}{Gg'} = k$$

avec

$$\frac{ef}{eg} = \frac{e'f'}{e'g'} = \frac{\text{EF}}{\text{EG}} \quad (\textit{fig. } 2);$$

M étant un autre point quelconque de L, $\text{M}m$ et $\text{M}m'$

Fig. 2 *bis*.

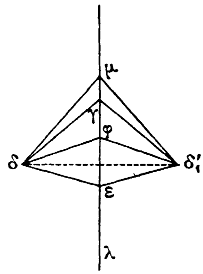


ses distances à D et D', il s'agit de prouver que

$$\frac{\text{M}m}{\text{M}m'} = \lambda.$$

Projetons les droites D et L, et celles qui s'appuient

Fig. 2 *ter*.



sur elles, sur un plan perpendiculaire à D, suivant δ, λ, $\delta\varepsilon$, $\delta\varphi$, $\delta\gamma$, $\delta\mu$; nous avons (*fig.* 2 *bis*)

$$\delta\varepsilon = e\text{E}, \qquad \delta\varphi = f\text{F}, \qquad \delta\gamma = g\text{G}, \qquad \delta\mu = m\text{M}.$$

Faisons une projection analogue sur un plan perpendiculaire à D', d'où la figure $\delta'\varepsilon'\varphi'\gamma'\mu'$; comme

$$\delta\varepsilon = e\mathrm{E}, \qquad \delta'\varepsilon' = e'\mathrm{E}, \qquad \ldots,$$

nous pouvons écrire à cause de l'hypothèse

$$(1) \qquad \frac{\delta\varepsilon}{\delta'\varepsilon'} = \frac{\delta\varphi}{\delta'\varphi'} = \frac{\delta\gamma}{\delta'\gamma'} = k.$$

Transformant homothétiquement la deuxième figure par rapport au point δ', nous pouvons supposer $\varepsilon'\varphi'\gamma'$ égal à $\varepsilon\varphi\gamma$; comme d'ailleurs

$$\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon\varphi} = \frac{\varepsilon'\mu'}{\varepsilon'\varphi'} = \frac{\mathrm{EM}}{\mathrm{EF}},$$

nous aurons alors $\varepsilon'\mu' = \varepsilon\mu$, et nous pourrons faire coïncider les divisions égales $\varepsilon'\varphi'\gamma'\mu'$ et $\varepsilon\varphi\gamma\mu$, δ' venant en δ'_1 de l'autre côté de δ par rapport à la droite λ; dans ces conditions, les relations (1) donnent (*fig.* 2 *ter*)

$$\frac{\delta\varepsilon}{\delta'_1\varepsilon} = \frac{\delta\varphi}{\delta'_1\varphi} = \frac{\delta\gamma}{\delta'_1\gamma}$$

égalités qui exigent que la droite $\varepsilon\varphi\gamma$ soit perpendiculaire à $\delta\delta'_1$ en son milieu, de sorte qu'alors $\delta\mu = \delta'_1\mu$.

On en conclut, en revenant à la figure primitive, que

$$\frac{\delta\mu}{\delta'\mu'} = \frac{\delta'_1\mu}{\delta'\mu'} = \frac{\delta'_1\varepsilon}{\delta'\varepsilon'} = \frac{\delta\varepsilon}{\delta'\varepsilon'} = k$$

et par suite

$$\frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{M}m'} = k. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

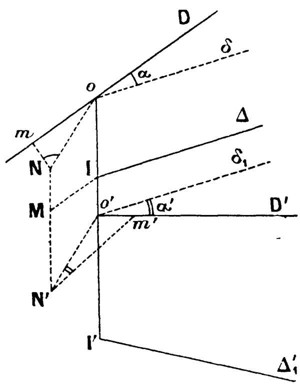
Il résulte de là que la droite qui passe par tout point de (S) et s'appuie sur Δ et Δ'_1, ou sur Δ_1 et Δ', appartient tout entière au lieu, qui est par suite une *surface réglée*. Soient L_1, L_2, L_3 trois pareilles droites s'appuyant sur Δ et Δ'_1, et par suite non en même plan deux à deux, M un point quelconque de (S); les droites Λ_1, Λ_2, Λ_3 passant par M et rencontrant respectivement deux des trois premières, font partie du lieu.

Si Λ_1 et Λ_2, qui coupent L_3, différaient, toute droite de leur plan, coupant trois droites de (S), ferait partie de cette surface, le plan (M, L_3) appartiendrait tout entier au lieu, ce qui est absurde; par conséquent Λ_1, Λ_2, Λ_3 se confondent nécessairement suivant une droite qui s'appuie sur L_1, L_2, L_3, et *le lieu est la quadrique définie par ces trois dernières.*

Nous allons en donner une génération simple :

Soient M un point du lieu contenu dans le plan Π

Fig. 3.



perpendiculaire en I à Δ, Mm et Mm' ses distances à D et D' :

$$\frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{M}m'} = k \ (\textit{fig. } 3).$$

La parallèle menée par M à OO' coupe en N et N' les plans parallèles R et R' qui contiennent respectivement D et D'; Nm et N'm' sont perpendiculaires à D et D'; comme $\widehat{MI\Delta}$ est droit, $\widehat{NO\delta}$ et $\widehat{N'O'\delta_1}$ le sont, δ et δ_1 étant les projections de Δ sur les plans R et R', et l'on a

$$\widehat{ONm} = \alpha, \qquad \widehat{O'N'm'} = \alpha';$$

d'où, puisque $ON = O'N'$,

$$\frac{Om}{O'm'} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = k.$$

Les triangles rectangles MmO, $Mm'O'$, ayant leurs côtés de l'angle droit proportionnels, sont semblables et donnent

$$\frac{MO}{MO'} = k.$$

M est donc sur la sphère de diamètre II', et (S) contient le cercle Γ de diamètre II' situé dans le plan Π; cette surface contient aussi le cercle de même diamètre situé dans le plan Π' perpendiculaire en I' à Δ'_1 : (S) *est donc l'hyperboloïde passant par* Δ *et* Δ'_1 *et ayant ses plans de sections circulaires perpendiculaires à ces droites;* son ellipse de gorge a II' pour axe focal; Δ et Δ_1, Δ' et Δ'_1 sont les génératrices aux extrémités de cet axe.

On peut considérer cet hyperboloïde comme engendré par la droite s'appuyant sur Δ et Δ'_1 et passant par le point M qui décrit le cercle Γ : la droite I'M du plan Π est orthogonale à Δ; d'ailleurs $\widehat{IMI'}$ étant droit, I'M est perpendiculaire au plan $MI\Delta$, et les deux plans $MI\Delta$ et $MI'\Delta'_1$ sont rectangulaires; mais leur intersection n'est autre que la génératrice de (S) qui passe en M, donc (S) *est le lieu des arêtes des dièdres droits dont les faces passent respectivement par* Δ *et* Δ'_1.

On voit ainsi que le lieu des arêtes des dièdres droits dont les faces contiennent respectivement deux droites fixes est l'hyperboloïde ayant ces droites pour génératrices, leur plus courte distance pour axe focal de l'ellipse de gorge, et ses plans cycliques perpendiculaires aux deux droites (Chasles).

Il est aisé de se rendre compte que tout hyperboloïde (H) dont les plans cycliques sont perpendiculaires à deux génératrices est susceptible de ce dernier mode de génération, d'où il suit qu'il peut, d'une infinité de manières, être considéré comme lieu des points dont le rapport des distances à deux droites a une valeur constante.

Considérons en effet les plans cycliques passant au centre de (H), leur intersection est perpendiculaire à la fois aux deux génératrices Δ et Δ'_1, qui sont par suite des génératrices passant par deux sommets opposés, de sorte que leur perpendiculaire commune II′ est le diamètre commun aux sections circulaires centrales de l'hyperboloïde (H).

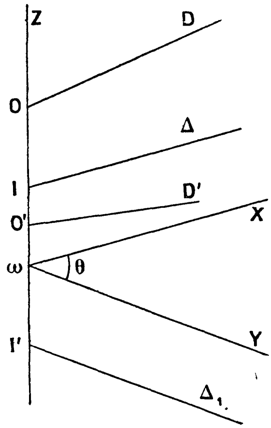
Si M est un point de la section perpendiculaire à Δ, MI′ étant orthogonal à Δ et à MI est perpendiculaire au plan MIΔ; les plans MIΔ et MI′Δ'_1 sont perpendiculaires, la génératrice de (H) qui passe en M, et s'appuie sur Δ et Δ'_1, est l'arête d'un dièdre droit dont les faces contiennent respectivement ces droites.

Soient maintenant O et O′ deux points divisant harmoniquement II′, OD et O′D′ deux droites perpendiculaires à II′ et dont les directions forment, avec celles des génératrices Δ et Δ'_1 de l'hyperboloïde (H) considéré, un faisceau harmonique, Δ faisant avec OD et O′D′ des angles α et α' tels que

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{\mathrm{IO}}{\mathrm{IO'}} \quad (\textit{fig. } 4).$$

D'après ce qui a été vu, le lieu des points dont le rapport des distances aux droites D et D' est égal à $\frac{IO}{IO'}$, est un hyperboloïde passant par Δ, Δ'_1 et ayant ses

Fig. 4.



sections circulaires perpendiculaires à ces deux dernières droites, c'est-à-dire précisément l'hyperboloïde (H), qui peut être ainsi considéré, d'une infinité de manières, comme lieu des points dont le rapport des distances à deux droites a une même valeur.

Cherchons le *lieu des droites* D *et* D' correspondant à un hyperboloïde donné (H) : prenons pour axes de coordonnées les parallèles ωX, ωY menées à Δ et Δ'_1 par le milieu ω de II', et cette perpendiculaire commune pour ωZ; soient θ l'angle de Δ et Δ'_1, $2a$ leur distance II', z l'ordonnée de D; nous avons (*fig.* 4)

$$k = \frac{IO}{IO'} = \frac{I'O}{I'O'} = \frac{IO + I'O}{IO' + I'O'} = \frac{2O\omega}{II'} = \frac{|z|}{a}.$$

Projetons les diverses droites sur le plan $X\omega Y$, et soient d et d' les projections de D et D' : d fait avec ωX un angle α, et si $y = mx$ est son équation, on a

$$\tan\alpha = \frac{m \sin\theta}{1 + m\cos\theta};$$

l'équation de d' est alors $y = -mx$, et l'angle α' que fait cette droite avec ωX est tel que

$$\tan\alpha' = \frac{-m \sin\theta}{1 - m\cos\theta};$$

par suite,

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha'} = \frac{1 - 2m\cos\theta + m^2}{1 + 2m\cos\theta + m^2}.$$

Ecrivant que $\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha'} = k^2$, et observant que $m = \frac{y}{x}$, $k = \frac{|z|}{a}$, en appelant x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de D, nous obtenons le lieu suivant de D, et par suite aussi de D',

$$\frac{x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta}{x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta} = \frac{z^2}{a^2}.$$

C'est un *conoïde droit du quatrième ordre*, ayant pour axe l'axe focal de l'ellipse de gorge de (H), et pour directrice la courbe d'intersection des surfaces

$$x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta = z^2,$$
$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta = a^2,$$

c'est-à-dire la courbe du cône représentée par la première équation qui se projette sur le plan $X\omega Y$ suivant le cercle de centre ω et de rayon a.

Remarque. — Revenons aux figures 2, 2 *bis* et 2 *ter*: la deuxième et la troisième sont semblables, et si $\delta\rho$, $\delta'\rho'$ sont perpendiculaires à λ et λ', leurs pieds ρ et ρ' sont des points homologues des divisions semblables $\varepsilon\varphi\gamma, \ldots,$ $\varepsilon'\varphi'\gamma', \ldots$; ρ et ρ' correspondent donc au même point de L, et l'on a

$$\frac{\delta\rho}{\delta'\rho'} = \frac{\delta\varepsilon}{\delta'\varepsilon'} = \frac{\mathrm{E}e}{\mathrm{E}e'} = k,$$

d'où cette propriété :

Les perpendiculaires communes à toute droite L *du lieu* (S), *et aux droites* D *et* D′ *respectivement, ont le même pied sur* L, *et le rapport des distances de* L *à* D *et* D′ *est égal au rapport donné* k.

Cette dernière condition, prise isolément, définit un complexe de droites; si nous lui ajoutons la première condition, les droites qui les vérifient forment une congruence et peuvent être ainsi définies : k, D, D′ étant donnés, et déterminant l'hyperboloïde (S), par tout point de cette surface menons la perpendiculaire au plan déterminé par les perpendiculaires issues de ce point à D et D′, nous obtenons une droite de la congruence; en particulier, les génératrices de (S) qui s'appuient sur Δ et Δ', appartiennent à cette congruence. Quelle est la troisième condition à laquelle sont astreintes ces génératrices? Les figures semblables donnent

$$\frac{\varepsilon\varphi}{\varepsilon'\varphi'} = \frac{\delta\varepsilon}{\delta'\varepsilon'} = \frac{\mathrm{E}e}{\mathrm{E}e'} = k;$$

mais, ψ et ψ' désignant les angles de L avec D et D′, on a

$$\varepsilon\varphi = \mathrm{EF}\sin\psi, \qquad \varepsilon'\varphi' = \mathrm{EF}\sin\psi',$$

par conséquent,

$$\frac{\sin\psi}{\sin\psi'} = k.$$

Le rapport des sinus des angles de L *avec* D *et* D′ *est égal au rapport donné* k.

Cas où $k = 1$. — Pour toute valeur de k différente de l'unité, Δ, faisant avec les directions des droites données D et D′ des angles α et α' liés par la relation $\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = k$, diffère des bissectrices de l'angle de ces directions ; Δ et Δ'_1 ne sont donc pas perpendiculaires ; un hyperboloïde susceptible de la génération étudiée ne peut donc avoir ses génératrices Δ et Δ'_1 orthogonales, ce qui est d'ailleurs manifeste *a priori*.

Dans le cas particulier où $k = 1$, le point I vient au milieu de OO′, I′ est rejeté à l'infini sur OO′, (S) est un paraboloïde équilatère de sommet I, d'axe OO′, ayant ses plans directeurs également inclinés sur les droites données D et D′ ; les génératrices de l'un des systèmes font avec D et D′ des angles égaux, sont également distantes de ces droites, et les perpendiculaires communes à chacune de ces génératrices et aux deux droites D et D′, respectivement, ont le même pied sur la génératrice.

Inversement, tout paraboloïde équilatère peut être considéré, d'une infinité de manières, comme le lieu des points équidistants de deux droites perpendiculaires à l'axe, équidistantes du sommet, et symétriques en direction par rapport aux plans directeurs ; si le paraboloïde a pour équation

$$yz - ax = 0,$$

on trouve aisément, pour le lieu de ces droites, la surface

$$x(y^2 + z^2) + ayz = 0,$$

conoïde de Plücker ayant pour directrices l'axe du paraboloïde et l'ellipse du plan $x = y$, qui se projette sur le plan yOz suivant le cercle

$$y^2 + z^2 + az = 0.$$