Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 383-424

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__383_1>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Grenoble.

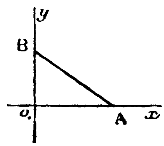
ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Intégrer l'équation différentielle*

$$y'' - 2y' + (1 + m)y = e^x + e^{2x} + \sin x,$$

où m désigne une constante réelle. Donner l'expression de l'intégrale générale pour toutes les valeurs réelles de m.

II. *Un mobile* B *se meut sur la droite* Oy *avec une vitesse constante et égale à* 1. *Un second mobile* A *est assujetti à se trouver sur la droite perpendiculaire* Ox, *et à une distance constante a du mobile* B. *Écrire l'équation du mouvement du mobile* A. *Décrire ce mouvement en étudiant successivement les cas où à l'instant initial l'ordonnée* y_0 *du mobile* B, *qui est inférieure à a en valeur absolue, est positive, nulle et négative. Tracer le diagramme des espaces et celui des vitesses.*

III. *On fait tourner autour de son axe une parabole de paramètre a, et l'on coupe le paraboloïde de révolution* *ainsi engendré par un plan perpendiculaire à l'axe, et situé à la distance h du sommet. Calculer le volume du solide obtenu, sa surface totale : calculer cette surface à $\frac{1}{100}$ près pour $a=2$, $h=3$. Calculer le moment d'inertie du solide, supposé homogène de densité 1, par rapport à*



l'axe de révolution. Déterminer le centre de gravité et l'ellipsoïde central d'inertie de ce solide. Quel doit être le rapport $\frac{h}{a}$ pour que cet ellipsoïde soit une sphère?

Epreuve pratique. — I. *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x)(1+x^2)}.$$

II. *Intégrer l'équation différentielle*

$$2xyy' = y^2 - 4x^2.$$

Définir géométriquement les courbes intégrales.

III. *Un point matériel* M, *de masse m, mobile sur une horizontale fixe Ox, est soumis uniquement à une résistance de milieu* R, *qui est dirigée en sens contraire de la vitesse* V *et dont la valeur absolue est $mk\sqrt{v}$, k désignant une constante positive donnée.*

A l'instant $t=0$, le mobile est lancé dans le sens positif Ox avec une vitesse donnée v_0. Calculer : 1° le

temps T *au bout duquel la vitesse s'annule; 2° l'espace parcouru pendant le temps* T; 3° *le travail de la force* R *pendant le même temps. Application numérique : $m=3$, $k=2$, $v_0=4$, en unités C. G. S.* (Juin 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Intégrer l'équation différentielle*

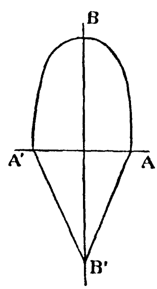
$$y'' - 3y' + 2y = \sin x + x^3 + e^{ax},$$

où a désigne une constante réelle. Donner l'expression de l'intégrale générale pour toutes les valeurs réelles de a.

II. *Un point* M *de masse* 1, *mobile sur une droite* Ox, *est repoussé par le point* O *de cette droite proportionnel-*

lement à sa distance x à ce point : à l'unité de distance, la force répulsive est égale à 4. *A l'instant initial* ($t = 0$), *le point* M *est placé en* M_0, *à la distance* 1 *du point* O, *et lancé vers le point* O *avec une vitesse dont la valeur absolue est égale à* 1. *Étudier le mouvement du point* M. *Tracer le diagramme des espaces et celui des vitesses.*

III. *De l'ellipse d'axes* $AA'(=2a)$ *et* $BB'(=2b)$, *on considère la moitié* ABA', *et l'on ajoute à cette demi-ellipse le triangle* $AB'A'$. *On suppose que le solide*



engendré par la révolution de la figure totale autour de l'axe BB' *est homogène de densité* 1. *Calculer le volume de ce solide, déterminer son centre de gravité, calculer son moment d'inertie par rapport à l'axe* BB'.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Intégrer les équations différentielles*

$$y'' = \frac{y'^2 + y'}{y}, \qquad y'' = \frac{y'^2 + 1}{y}.$$

II. *On coupe l'hyperboloïde de révolution à une nappe qui a comme équation en axes rectangulaires*

$$x^2 + y^2 - z^2 - a^2 = 0$$

par deux plans perpendiculaires à l'axe de révolution, et de cotes $\pm b$. *Calculer le volume de l'hyperboloïde compris entre ces deux plans. Calculer la longueur du segment que ces deux plans interceptent sur une génératrice quelconque de l'hyperboloïde. En supposant que cette longueur est égale à* 2 *et que* a *est égal à* 1, *calculer à une unité près le volume considéré.* (Octobre 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Un point* M *de masse* m *est attiré par un centre fixe* O *proportionnellement à la distance; on appellera le coefficient de proportionnalité* mk^2.

Ce point M *est en outre soumis à une résistance de milieu proportionnelle à la vitesse (coefficient* mh^2).

On rapporte le mouvement à deux axes fixes rectangulaires passant par O *et l'on demande :*

1° *Écrire les équations différentielles du mouvement, en général.*

2° *Trouver l'intégrale générale de ces équations, dans le cas particulier où le coefficient* h^2 *est petit par rapport à* k^2.

3° *On supposera le point* M *situé sur* Ox *à l'instant initial (abscisse* x_0 *positive) et la vitesse initiale* v_0 *dirigée parallèlement à* Oy *et dans le même sens : calculer dans ces conditions les valeurs des constantes d'intégration en fonction des données initiales.*

Quel est alors la forme de la trajectoire? Étudier le mouvement.

4° *La trajectoire précédente coupe une infinité de fois l'axe des* x; *soit* A_n *le* $n^{\text{ième}}$ *de ces points d'intersection dans l'ordre où les rencontre le mobile* (A_1 *étant la position initiale); calculer la valeur absolue de l'aire limitée par l'axe* Ox *et la portion de trajectoire décrite entre deux points consécutifs* A_n *et* A_{n+1}.

5° *En appelant* $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ *les aires dont il est question dans la quatrième partie, montrer que la série* $S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots$ *est convergente.*

Quelle est la somme de cette série?

On peut faire sur cette somme quelques remarques intéressantes.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Étant donnée l'équation*

$$\sin x + \frac{1}{10}\cos x = x,$$

calculer numériquement sa racine positive.

Donner le résultat avec une approximation égale au moins à $\frac{1}{100}$.

2° *Calculer le moment d'inertie d'une plaque rectangulaire homogène infiniment mince, de côtés* **a** *et* **b** *par rapport :*

1° *à l'un de ses axes;*

2° *à une droite de l'espace, parallèle à un axe de la plaque à la distance d de cet axe.*

Déduire de ces résultats le moment d'inertie d'un parallélépipède rectangle homogène, de dimensions a, b, c par rapport à l'un de ses axes.

(Juin 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE — *On considère l'équation différentielle*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 11y = e^{3x}\left[\sin\sqrt{2}x + x^2 + 1\right].$$

1° *Trouver l'intégrale générale;*

2° *Trouver l'intégrale particulière qui représente, par rapport à deux axes de coordonnées rectangulaires, l'équation d'une courbe* C *passant par l'origine et admettant comme tangente en ce point la bissectrice des axes* $y = x$.

3° *Construire la portion de cette courbe* C *comprise entre l'origine et le point qui a pour abscisse* $x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Calculer l'aire comprise entre l'axe Ox, *la portion de courbe* C *précédemment construite et la droite* $x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer, avec une erreur absolue* *inférieure à $\frac{1}{100}$, l'intégrale définie*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x^3}}.$$

(Novembre 1912.)

Lille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Question de cours. — *Champs de forces, lignes de force, surfaces de niveau.*

Cas où les forces dérivent d'un potentiel; travail d'une force dérivant d'un potentiel.

Problèmes. — I. *Dans un plan rapporté à deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *trouver toutes les courbes telles que la somme* $Mm + MT$ *des distances d'un point quelconque* M *à sa projection* m *sur* Ox *et au point* T *où la tangente en* M *rencontre le même axe soit égale à une longueur donnée.*

L'une de ces courbes peut être représentée par les équations

$$x = 2t + a\,\mathrm{L}\frac{a-t}{a+t},$$

$$y = \frac{a^2 - t^2}{2a},$$

où a *désigne une quantité fixe et* t *un paramètre variable; construire cette courbe, la rectifier.*

II. Ox, Oy, Oz *étant trois axes de coordonnées rectangulaires, construire les projections sur les plans* xOz, yOz *de la courbe d'intersection du cône*

$$x^2 + y^2 = z^2$$

avec le cylindre droit qui a pour base dans le plan xOy *la lemniscate représentée par l'équation*

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),$$

où a *désigne une longueur donnée.*

Calculer l'aire de la portion de surface du cône comprise à l'intérieur du cylindre.

Problèmes. — I. *Construire la courbe plane* (C) *représentée dans un système d'axes rectangulaires, par les équations*

$$x = t^2, \qquad y = -\frac{t^3}{3} + t,$$

où t désigne un paramètre variable; rectifier cette courbe, calculer l'aire de la portion de plan limitée par la boucle.

Former la relation qui existe entre les abscisses de deux points M, M' *de* (C) *où les tangentes sont parallèles.*

II. *Intégrer l'équation*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^x + e^{-x}.$$

Épreuve pratique. — I. *e désignant la base des logarithmes népériens, on considère la courbe* (C) *qui, rapportée à deux axes rectangulaires, a pour équation*

$$\text{(C)} \qquad y = e^x - ax^2 + 7x - 1.$$

1° *a variant, construire le lieu des points d'inflexion des courbes* (C).

2° *Construire la courbe* (C) *obtenue pour* $a = 5$.

3° *Soit* A *le point d'inflexion de la courbe précédente. Calculer l'aire de la portion du plan limitée par l'arc* OA *et la corde* OA.

II. *Un point* M *de masse* 1, *mobile sur une droite ox, est repoussé par le point o de cette droite proportionnel-*

lement à sa distance à ce point : à l'unité de distance, la force répulsive est égale à 1. *On suppose le point* M *placé à l'instant initial en* M_0, *à une distance* 2 *du point o, et lancé vers le point o avec une vitesse dont la valeur absolue est* 1. *Étudier le mouvement du point* M.

(Novembre 1911.)

Épreuve théorique. — Question de cours (au choix). —

1° *Énoncer et démontrer le théorème des forces vives dans le cas d'un point matériel unique. Appliquer ce théorème au cas où la résultante des forces appliquées au point considéré dérive d'une fonction de forces, définir alors l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et l'énergie totale du point matériel.*

2° *Travail des forces appliquées à un solide théorique indéformable.*

Problèmes. — I. *Dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, *trouver et intégrer l'équation différentielle des courbes telles que la longueur du segment* MN *intercepté sur une normale quelconque par le pied* M *de cette normale et le point* N *d'intersection avec* Ox *soit dans un rapport constant donné avec la longueur du rayon vecteur* OM ; *examiner en particulier le cas où les deux longueurs sont égales.*

II. *Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *construire la courbe* (C) *représentée par les équations*

$$y^2 - x^3 + 1, \qquad z = 0;$$

trouver le lieu géométrique du milieu des segments interceptés par cette courbe sur les droites issues du point $(0, 1, 0)$.

Calculer le volume de la portion de l'espace limitée par le plan xOy, $(0 \leqq x \leqq 1)$, *le cylindre droit qui a pour base la courbe* (C) *et la surface représentée par l'équation*

$$z = x^2 y^2.$$

Problème. — *Construire la courbe plane* (Γ) *représentée dans un système d'axes rectangulaires par l'équation*

$$y^2(x = 1) - x^3 = 0;$$

indiquer le nombre des points d'intersection de cette courbe avec une droite quelconque issue du point d'abscisse $\frac{1}{2}$ *sur* Ox; *discuter.*

Calculer l'aire d'un trapèze curviligne limité par un arc AB *de* (Γ), *les parallèles à* Oy *menées par* A, B *et l'axe* Ox; *calculer également le volume engendré par ce trapèze en tournant autour de* Ox.

Épreuve pratique. — Géométrie analytique. — *On considère la courbe* (C) *rapportée à deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *et qui a pour équation*

$$(C) \qquad y = x^2 + x^3.$$

1° *Représenter la courbe* C *et les cercles de courbure aux points de rencontre* O *et* A *de la courbe* (C) *avec* OX.

2° *Démontrer que le cercle de courbure au point* O *ne rencontre* C *qu'en un seul point* B *autre que l'origine. Calculer les coordonnées du point* B.

3° *L'arc de courbe* C *limité aux points* O, B *partage en deux parties le cercle de courbure en* O. *Déterminer les aires de ces régions.*

Mécanique. — *Calculer les moments d'inertie du volume d'un cône de révolution homogène, dont le rayon de base est* R, *la hauteur* h *et la masse spécifique* μ : 1° *par rapport à l'axe de révolution;* 2° *par rapport à une perpendiculaire à l'axe passant par le sommet;* 3° *par rapport à une perpendiculaire à l'axe passant par le centre de gravité;* 4° *par rapport à une perpendiculaire à l'axe passant par le centre de la base.*

(Juillet 1912.)

Épreuve théorique. — Question de cours. — *Énoncer et démontrer le théorème des projections des quantités de mouvement d'un système matériel, ou du mouvement du centre de gravité, et le théorème des moments des quantités de mouvement.*

Problèmes. — I. *Dans un plan rapporté à un système de coordonnées polaires de pôle* O, *construire la courbe* (C) *représentée par l'équation*

$$\rho = a \sin 2\omega,$$

où ω *et* ρ *désignent l'angle polaire et le rayon vecteur d'un point* M, a *étant une longueur donnée.*

Construire aussi la courbe engendrée par le point M' *de la droite* OM *tel que* $\overline{OM}$ *et* $\overline{OM'}$ *satisfassent à l'égalité*

$$\overline{OM}\,\overline{OM'} = a^2.$$

Calculer l'aire d'une boucle de la courbe (C).

Calculer le volume de la portion de l'espace limitée par la sphère de centre O *et de rayon* a *et par le cylindre droit qui a* (C) *pour base.*

Trouver et intégrer l'équation différentielle des trajectoires orthogonales de la famille de courbes engendrée par (C) *quand* a *varie.*

II. 1° *Construire — les axes de coordonnées étant rectangulaires — la courbe plane représentée par l'équation*

$$y = x(\lambda + \mathrm{L}x),$$

λ *désignant un paramètre.*

Calculer les coordonnées du point de cette courbe où la tangente est parallèle à Ox; *indiquer la ligne décrite par ce point quand* λ *varie.*

Calculer l'aire du triangle curviligne limité par Ox, *la courbe donnée et une parallèle à* Oy.

2° *Intégrer l'équation différentielle*

$$y'' + y = x + \cos x.$$

Épreuve pratique. — Algèbre, Géométrie analytique, Calcul différentiel et intégral. — *Construire la courbe* C *représentée en coordonnées polaires par l'équation*

$$\rho = \cos 3\omega.$$

On représentera par L *et* S *la longueur et l'aire d'une boucle.*

Soient L′ *et* S′ *la longueur et l'aire de la courbe* E

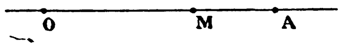
$$x^2 + q y^2 = 1.$$

Calculer S, S′, *et le rapport* $\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L}'}$ (*ce rapport est un nombre rationnel*).

Mécanique (au choix). — I. *Un point matériel* M *de masse* 1 *mobile sur une droite est attiré par un point* O *de cette droite proportionnellement à la distance, la valeur absolue de l'attraction à l'unité de distance étant* α^2, *et repoussé par un autre point* A *de cette droite*

($OA = 2$) *proportionnellement à la distance, la valeur absolue de répulsion à l'unité de distance étant* β^2.

Le point M *a-t-il une position d'équilibre? Montrer que*



l'attraction et la répulsion considérées peuvent être remplacées en général par une attraction ou une répulsion unique. Dans le cas où elles peuvent être remplacées par une attraction unique, quel est le mouvement du point M, *quelle est la période de ce mouvement? La position d'équilibre du point* M *est-elle stable ou instable? Quand le point* M *n'a pas de position d'équilibre, quel est son mouvement?*

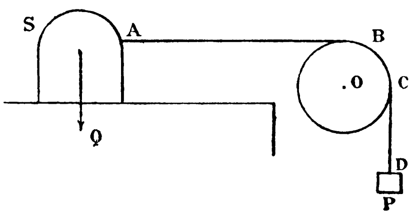
II. 1° *Calculer le travail à fournir pour faire passer* 10^{m^3} *d'eau d'un réservoir* A, *qui en contient* 25, *dans un réservoir* A', *qui est vide, sachant que :*

A *est un parallélépipède rectangle dont la base horizontale* B *a* $3^m,2$ *de long sur* $2^m,15$ *de large;*

A' *est un cylindre de révolution, dont la base horizontale* B', *placée à* $6^m,5$ *au-dessus de* B, *a* $2^m,2$ *de diamètre.*

2° *Trouver la condition de l'équilibre strict du système suivant :*

Un solide S, *de poids* Q, *repose par une face plane sur*



une table horizontale H, *sur laquelle il peut glisser avec frottement; il est soumis en* A *à un effort de traction exercé par une corde* ABCD, *qui s'enroule en* BC *sur la section droite d'un cylindre de révolution fixe* O, *sur lequel elle peut glisser avec frottement, et qui porte à son extrémité* D *un poids* P. *On supposera que le brin* AB *est horizontal et que son prolongement rencontre la verticale du centre de gravité* G *de* S.

Données. — *Poids*, $Q = 50^{kg}$; *coefficient de frottement de* S *sur* H, $f = 0,15$; *coefficient de frottement de la corde sur le tambour* O, $f' = 0,25$.

On rappelle que le nombre $e = 2,718$ *sensiblement.*

(Novembre 1912.)

Lyon.

Épreuve théorique. — I. *Principe des vitesses virtuelles. Principe de d'Alembert. Équations de Lagrange.*

II. *On considère la surface qui rapportée à trois axes rectangulaires a pour équation*

$$z = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$$

1° *Montrer que sur cette surface il y a une infinité de droites.*

2° *Construire les courbes de niveau, sections de la surface par des plans parallèles à* xOy.

3° *Lignes de plus grande pente de la surface.*

4° *Volume compris entre le plan* $z = 0$, *la surface et les quatre plans* : $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$.

Épreuve pratique. — 1° *Intégrer l'équation différentielle*

$$\text{(E)} \qquad x\frac{dy}{dx} - (x+1)y = \frac{e^x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

2° *Quelle relation y a-t-il entre les courbes intégrales de l'équation* (E) *et la courbe*

$$\text{(C)} \qquad y = \frac{-e^x}{(x+1)\sqrt{x^2 - 1}}.$$

3° *Construire la courbe* (C).

4° *La courbe* (C) *coupe-t-elle la droite*

$$y = -\frac{3}{2}.$$

(Juillet 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires, on considère la courbe* C *du plan* xOy *qui a pour équation en coordonnées polaires*

$$\rho = \cos\frac{\theta}{2},$$

Ox *étant l'axe polaire.*

1° *Construire cette courbe.*

2° *Déterminer son degré.*

3° *On considère la surface cylindrique engendrée par des droites parallèles à* Oz *qui s'appuient sur la portion de courbe* C *décrite, lorsque* θ *varie de* o *à* π. *Volume du solide* S *limité par cette surface cylindrique, par le plan* $z = 0$ *et par le plan* $z = y$.

4° *Aires des différentes faces du solide* S.

II. *Établir l'équation différentielle du mouvement d'un point matériel sur une courbe fixe donnée, quand on néglige le frottement. Appliquer au mouvement du pendule simple.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Construire la courbe*

$$y = \frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{(x+1)^2(x^2+1)}$$

sans étudier la dérivée y'. *Position des branches de la courbe par rapport aux asymptotes.*

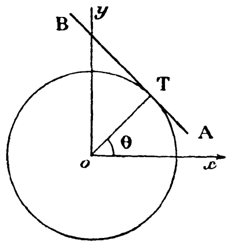
2° *Calculer* $\int_0^1 y\,dx$.

3° *Nombre de points d'intersection réels de la courbe et de la droite* $y = 1$. *Calculer à* $\frac{1}{10}$ *près les coordonnées de ces points d'intersection.* (Novembre 1912.)

Marseille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Un segment rectiligne* AB *de ongueur* πa *roule sans glisser sur un cercle fixe de centre* O *et de rayon* a, *de manière que le point de contact* T *du segment avec le cercle soit au début du* *mouvement à l'une des extrémités du segment et à la fin à l'autre.*

1° *Exprimer les coordonnées rectangulaires des points*



des trajectoires que décrivent les points A *et* B *en fonction de l'angle* $\theta = \widehat{\mathrm{TO}x}$ *qui est nul au début du mouvement.*

2° *Calculer la longueur de la trajectoire du point* A.

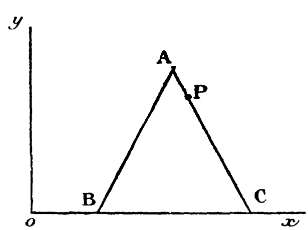
3° *Calculer l'aire comprise entre le cercle, la trajectoire de* A *et la position finale du segment* AB.

SOLUTION.

$$s = a\,\frac{\pi^2}{2}; \quad u = a^2\,\frac{\pi^2}{3}.$$

II. *Dans un plan vertical, sur une droite horizontale* Ox, *peut glisser sans frottement une plaque triangulaire* ABC *qui a la forme d'un triangle équilatéral de* 1$^{\text{m}}$ *de côté.*

Sur le côté AC *on place un point pesant* P *qui a le même poids que la plaque. Ce point peut glisser sans frottement sur* AC.



A l'origine du temps, le système est sans vitesse et le point P *est en* A. *On abandonne le système à lui-même et* *l'on demande quel sera le déplacement de la plaque quand le point* P *sera arrivé en* C.

SOLUTION.

$x = -0^{m},25.$

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Former par identification une série à coefficients constants*

$$y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + \ldots$$

qui satisfasse à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = ay,$$

où a *est une constante positive ou négative.*

2° *Vérifier les propriétés suivantes :*

La série obtenue est convergente pour toute valeur finie de x.

On peut prendre arbitrairement les coefficients λ_0 *et* λ_1.

On peut ranger les termes de la série y *de sorte qu'on ait*

$$y = \lambda_0 y_1 + \lambda_1 y_2$$

en représentant par y_1 *et par* y_2 *deux séries à coefficients numériques* (*a étant compté comme un nombre donné*), *l'une ne renfermant que des puissances paires de* x, *l'autre que des puissances impaires.*

Chacune des séries y_1 *et* y_2 *est une intégrale de l'équation différentielle.*

3° *Traiter successivement les cas où l'on a*

$$a = 2 \quad \text{et} \quad a = -3.$$

Nota. — *On peut vérifier les calculs en comparant les résultats obtenus avec ceux que donne l'intégration générale directe de l'équation différentielle.*

(Juin 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *En imaginant un tore engendré par un cercle de* $0^{m},10$ *tournant autour d'un axe situé dans son plan à une distance de* 1^{m} *du centre de ce cercle,* *on demande de mesurer les courbures principales en l'un quelconque des points du tore situés à la distance de* $0^{m},95$ *de l'axe.*

En prenant pour axe des z la normale à la surface au point considéré, pour axes des x et des y les traces des sections principales sur le plan tangent, donner une valeur approchée de z considérée comme fonction de x et y en négligeant les infiniment petits du troisième ordre. Indiquer la nature du paraboloïde correspondant qui représente approximativement l'élément de surface du tore dans le voisinage du point considéré.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale définie*

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}\sin^2 u}}$$

par la méthode de Simpson en subdivisant l'intervalle de 0 *à* $\frac{\pi}{2}$ *en six parties égales.*

Calculer la même intégrale par la méthode des trapèzes en utilisant les mêmes ordonnées que dans la méthode de Simpson.

On fera les calculs à cinq décimales.

(Novembre 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Mathématiques. — *Déterminer l'enveloppe des droites de la famille déterminée en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$y = x \operatorname{tang} \alpha + m \cot \alpha,$$

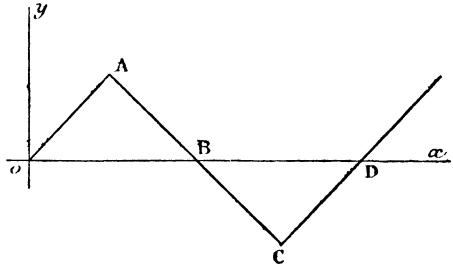
où m représente une longueur donnée et α *un paramètre variable. Calculer l'angle de l'axe des x et du bras de levier de la droite (perpendiculaire abaissée de l'origine sur la droite) et la longueur de ce bras de levier quand* α *est choisi.*

Longueur d'arc de la courbe enveloppe entre α *et* $\frac{\pi}{2}$.

II. Mécanique. — *Un mobile pesant* P *est attiré par un point fixe* O *proportionnellement à la distance; l'attraction à la distance d est égale au poids du point mobile* P.

Trouver le mouvement de P, *sachant qu'à l'origine du temps il est placé, sans vitesse initiale, sur l'horizontale du point* O *en un point* A_0 *tel que* $OA_0 = a$.

Épreuve pratique. — *On considère la fonction représentée par le graphique suivant :*



où les points A, B, C, D *ont pour coordonnées*

$$A\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2}, \\ y = \dfrac{\pi}{2}; \end{cases} \quad B\begin{cases} x = \pi, \\ y = 0; \end{cases} \quad C\begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{2}, \\ y = -\dfrac{\pi}{2}; \end{cases} \quad D\begin{cases} x = 2\pi, \\ y = 0. \end{cases}$$

Cette fonction a pour période 2π.

On demande de calculer les coefficients de la série trigonométrique

$$A_0 + A_2 \cos x + A_3 \cos 2x + \ldots$$
$$+ B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \ldots$$

qui la représente.

On rappelle aux candidats les formules :

$A_0 =$ valeur moyenne de la fonction de o à $\lambda\pi$,

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y \cos n\pi \, dx, \qquad B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y \sin nx \, dx.$$

(Juin 1912.)

Épreuve théorique. — *Étant donnés trois axes rectan-*

gulaires et une surface représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = f(z),$$

où $f(z)$ est une fonction qui s'annule pour $z = 0$ et qui prend des valeurs positives pour z positif, on peut considérer cette surface comme engendrée par une ellipse située dans un plan mobile parallèle au plan des xy et qui varie avec z, mais en restant semblable à elle-même. On peut, en outre, imaginer que cette surface, limitée par un plan quelconque parallèle au plan des xy, représente l'intérieur d'une coupe dont le fond est à l'origine des coordonnées et dont le bord est l'une des ellipses précédentes.

Cela posé, on place verticalement l'axe des z et l'on suppose qu'on remplisse d'eau cette coupe jusqu'à une hauteur z au moyen d'un robinet à débit constant donnant α unités de capacité pendant l'unité de temps, et l'on demande :

1° *Le volume d'eau jusqu'à la hauteur z;*

2° *L'expression de la vitesse d'accroissement de la hauteur z;*

3° *L'expression de la hauteur z en fonction du temps lorsque $f(z)$ est la dérivée d'une fonction connue $F(z)$.*

Applications numériques. — *En supposant un débit de* 3^l *à la minute.*

1. *On prend $a = b = 1^{dm}$ et $f(z).1^{dm} = 2z$;*

2. *On prend $a = b = 1^{dm}$ et $f(z).1^{dm^2} = z^2$, le décimètre étant pris pour unité de longueur.*

Vérifier que, pour une même hauteur z dans les cas 1 et 2, le carré de l'un des temps est proportionnel au cube de l'autre.

SOLUTION.

$$V_z = \frac{h}{6}(S_0 + 4S_1 + S_z) = \frac{\pi a b z}{6}\left[4f\left(\frac{z}{2}\right) + f(z)\right].$$

$\frac{dz}{dt} = \frac{\alpha}{S_z}$, ce qui montre que la vitesse d'accroissement de z est inversement proportionnelle à la section de niveau, comme on pouvait le prévoir.

On a

$$\alpha\, dt = \pi ab f(z)\, dz$$

et, en intégrant,

$$\alpha t = \pi ab\, F(z) \qquad \text{avec} \qquad F(0) = 0.$$

On a ensuite :

1° $S_z = 2\pi z$ en décimètres carrés,

$V_z = \pi z^2$ en décimètres cubes,

$t_1 = \frac{1}{3}\pi z^2$ en secondes;

2° $S_z = \pi z^2$ en décimètres carrés,

$V_z = \frac{1}{3}\pi z^3$ en décimètres cubes,

$t_2 = \frac{1}{9}\pi z^3$ en secondes.

Enfin, on a

$$\frac{t_1^3}{t_2^2}\ 3\pi.$$

Épreuve pratique. — *Sur une droite* Ox *inclinée à* 4 *se meut sans frottement un point pesant* M *qui est attiré par le point fixe* O *proportionnellement à la distance; l'attraction, à* 10ᵐ *de distance, est égale au poids du point* M.

1° *Trouver la position d'équilibre.*

2° *Trouver le mouvement du point* M *en supposant qu'à l'origine du temps il est placé sans vitesse au point* O.

3° *Trouver, à* $\frac{1}{10}$ *de seconde près, la durée de l'oscillation de* M.

SOLUTION.

A la distance x, l'attraction est kx; à la distance 10, on a $10k = mg$, d'où la valeur de k.

Il y a équilibre pour $\frac{mg}{10}x = \frac{\sqrt{2}}{2}mg$, d'où $x = 7{,}07$.

Dans le mouvement, on a

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\sqrt{\frac{2}{2}} - \frac{mg}{10}x,$$

d'où

$$x = s\sqrt{2}\left(1 - \cos\frac{\sqrt{g}}{10}t\right).$$

Le point oscille entre $x = 0$ et $x = 14,14$.
La durée de l'oscillation simple est

$$\pi\sqrt{\frac{10}{g}} = 3^{s},1.$$

(Novembre 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Construire la courbe représentée par l'équation*

$$x^4 - 6x^2y^3 + y^4 = 1.$$

2° *Trouver le mouvement d'un point* A *de masse égale à l'unité attiré par un point fixe* O *dont l'attraction à la distance* ρ *est égale à*

$$\frac{6k^2a}{\rho^4} - \frac{6k^2a^2}{\rho^5}.$$

On suppose que la distance initiale du point A *au point* O *est* a, *et que la vitesse initiale est perpendiculaire au rayon vecteur initial et est égale à* $\frac{k}{a}$.

On montrera que la trajectoire est représentée en coordonnées polaires par l'équation

$$\rho = a(2 + \cos\theta),$$

et l'on donnera la relation qui détermine θ *en fonction du temps.*

On montrera qu'à toute valeur du temps correspond une et une seule valeur de θ.

SOLUTION.

Théorème des aires

$$\rho^2\frac{d\theta}{dt} = k.$$

Théorème des forces vives

$$\frac{d\rho^2}{dt^2} + \rho^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{4k^2 a}{\rho^3} - \frac{3k^2 a^4}{\rho^4}.$$

En éliminant dt on a

$$\frac{1}{\rho^4} \frac{d\rho^2}{d\theta^2} + \frac{1}{\rho^2} = \frac{4a}{\rho^3} - \frac{3a^2}{\rho^4},$$

d'où l'on tire

$$d\theta = \frac{d\rho}{\sqrt{a^2 - (\rho - 2a)^2}}$$

et par suite

$$\rho = a(2 + \cos\theta).$$

En remplaçant ρ par sa valeur dans l'équation des aires, on a

$$a^2\left(4 + 4\cos\theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta = k\,dt,$$

d'où

$$\frac{9}{2}\theta + 4\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta = Ct.$$

La dérivée du premier membre étant toujours positive, il ne peut, pour une valeur donnée de t, y avoir plus d'une racine. D'ailleurs cette racine existe, car, pour $\theta = 0$, le premier nombre est nul, et, pour $\theta = \infty$, il est infini.

EPREUVE PRATIQUE. — *On considère l'équation différentielle*

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} = cx = \sin 2\pi ft,$$

dans laquelle on a

$$b = 1,5,$$
$$c = 4,$$
$$f = 0,2547.$$

1° *Calculer une intégrale particulière de la forme*

$$A \sin(2\pi ft + \alpha);$$

2° *Calculer l'intégrale générale.*

Nota. — *Les valeurs numériques données provenant de* *mesures, on exécutera les calculs de manière à obtenir les résultats avec l'approximation strictement compatible avec les données.* (Juin 1913.)

Montpellier.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une courbe* C *a pour équation*

$$3ay^2 = x^3.$$

Par l'origine, on mène deux droites rectangulaires, de coefficients angulaires m et $\frac{-1}{m}$, *qui coupent la courbe en deux points* M *et* M'. *Les tangentes en ces points se coupent au point* P.

1° *Calculer les coordonnées de ce point* P, *et démontrer qu'il décrit la parabole*

$$4y^2 = 9a(x-a)$$

lorsque m varie.

2° *Montrer que cette parabole est tangente à la courbe* C. *en deux points symétriques* A *et* A'.

3° *Calculer l'aire comprise entre les arcs de la courbe* C *et de la parabole, limites aux trois points* O, A, A'.

4° *Calculer la longueur de l'arc* OA *de la courbe* C.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer les intégrales*

$$\int_0^1 \frac{x+x^3}{1+x^6}\,dx \qquad \text{et} \qquad \int_1^\infty \frac{x+x^3}{1+x^6}\,dx;$$

que devient la première de ces intégrales, si l'on fait le changement de variable $x = \frac{1}{y}$.

(Novembre 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une courbe* C *est représentée, en coordonnées polaires, par l'équation*

$$\rho = a(1+\cos\omega).$$

Soit M *un point de la courbe, la droite* OM *coupe la courbe en un autre point* M'.

1° *Démontrer que la longueur* MM′ *est constante, et que les tangentes en* M *et en* M′ *sont perpendiculaires.*

2° *Les normales en* M *et en* M′ *se coupent en un point* A; *calculer les longuenrs* MA *et* M′A; *démontrer que* OA *est perpendiculaire sur* OM, *et trouver le lieu du point* A.

3° *Calculer les coordonnées*, x *et* y, *du point* A, *et du milieu* B *de* MM′; *former l'équation de la droite* AB, *et démontrer qu'elle passe par un point fixe.*

4° *Chercher l'enveloppe du cercle qui passe par les trois points* M, M′, A.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Déterminer l'intersection des deux surfaces*

$$x^2+y^2+z^2+4a^2, \qquad y^2+z^2=3ax.$$

Évaluer le volume, et la surface totale, du solide limité par les portions de ces surfaces comprises entre la courbe d'intersection, et les points (0, 0, 0) *de la seconde,* ($2a$, 0, 0) *de la première.* (Juin 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Déterminer l'intégrale générale de l'équation différentielle*

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4y=4\cos 2x.$$

Déterminer l'intégrale qui représente une courbe C *passant par l'origine, et tangente en ce point* O *à* Ox. *Montrer qu'il y a deux tangentes à la courbe* C, *qui passent par* O, *et qui ont une infinité de points de contact. Déterminer, en chacun de ces points de contact, le centre de courbure et le rayon de courbure; montrer que ces centres de courbure sont sur une hyperbole. Montrer que les aires des cercles de courbure, en ces points de contact, ont une somme finie.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Quelles sont les surfaces représentées par les équations*

$$\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=2x,$$

$$\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=\frac{(x+a)^2}{4a},$$

où a, b, c sont positifs. Montrer que leur intersection est formée de deux courbes planes. Calculer le volume limité par les parties des deux surfaces comprises entre ces deux courbes planes. (Novembre 1912.)

Nancy.

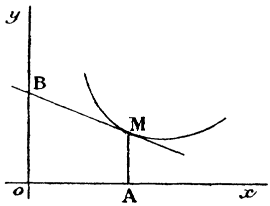
ÉPREUVE THÉORIQUE. — Analyse. — *Établir la formule de Green*

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int\int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Application à $\int_C (y\,dx - x\,dy)$.

Géométrie. — *Soit* C *une courbe tracée dans un plan rapporté à deux axes rectangulaires* Ox, Oy. *La tangente en un point quelconque* M *de la courbe* C *rencontre* Oy *en un point* B *et la parallèle à* Oy *menée par* M *rencontre* Ox *en un point* A.

1° *Déterminer les courbes* C *pour lesquelles l'aire du*



trapèze OAMB *a une valeur donnée* K^2, *lorsque* M *décrit la courbe.*

2° *Tracer les courbes* C *dont l'une est une hyperbole, soit* H. *Montrer que l'aire limitée par l'hyperbole* H, *une courbe* C *quelconque et la parallèle à* Oy *menée par le point de cette courbe* C *pour lequel la tangente est parallèle à* Ox, *a une valeur constante.*

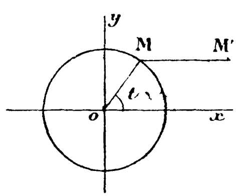
Géométrie et Mécanique. — *On considère le cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des* z *et dont la base est la parabole du plan des* xy *représentée par* *l'équation*

$$y = \frac{x^2}{2a}.$$

Déterminer sur ce cylindre une courbe C, *passant par l'origine des coordonnées, et dont les tangentes font avec l'axe* Ox *un angle constant égal à* $\frac{\pi}{4}$. *On posera* $x = a \sin t$ *et l'on exprimera les coordonnées des points de la courbe au moyen du paramètre* t.

En supposant que t *représente le temps et qu'un mobile, de masse* m, *entièrement libre, ait un mouvement défini par les expressions des coordonnées des points de la courbe* C *en fonction du temps, déterminer la force qui le sollicite et le travail de cette force pour un déplacement du mobile.* (Juin 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Première Partie. — *Un cercle étant rapporté à deux diamètres rectangulaires* Ox, Oy, *on définit un point* M *variable de ce cercle à l'aide de l'angle* t *que forme le rayon* OM *avec* Ox.



Sur la parallèle à Ox *menée par* M *on porte un vecteur* MM', *dont la mesure est une fonction déterminée* $f(t)$ *du paramètre* t.

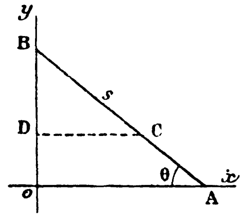
1° *Établir les formules donnant l'aire* S *balayée par le vecteur* MM' *et l'aire* Σ *balayée par le rayon vecteur* OM' *lorsque* t *varie de zéro à une valeur quelconque.* (*Pour trouver l'aire* Σ, *on utilisera les formules liant les coordonnées polaires du point* M' *à la variable* t.)

2° *Déterminer la fonction* $f(t)$ *de telle sorte que le rapport des aires* Σ *et* S *ait une valeur constante égale à* K.

Dans le cas où K *est égal à l'unité, achever l'intégration et tracer les courbes lieu du point* M′.

Deuxième Partie. — I. *Calcul du rayon de courbure d'une courbe gauche.*

II. *On considère une barre homogène* AB *de longueur* l



et dont la masse de l'unité de longueur est égale à μ. *Cette barre se déplace dans un plan horizontal de façon que ses extrémités* A *et* B *glissent sans frottement sur deux axes rectangulaires* Ox, Oy *de ce plan. Sa position est déterminée à chaque instant par l'angle* $BAO = \theta$, *et chacun de ses points* C *est déterminé par sa distance* $BC = S$ *au point* B.

Chaque élément de la barre, de longueur ds et de masse dm, entourant un point tel que C, *est soumis à une force attractive de la part de* Oy; *cette force est égale au produit de dm par la mesure du vecteur* CD *mené par le point* C *perpendiculairement à* Oy.

1° *Déterminer la grandeur et la position de la résultante des forces appliquées à la barre lorsque* θ *a une valeur donnée; quel est le travail de ces forces pour un déplacement de la barre?*

2° *Calculer, d'après le théorème de König, l'énergie cinétique de la barre.*

3° *Ecrire l'équation du mouvement et achever l'intégration, lorsque les conditions initiales permettent à la barre d'atteindre la position* Ox *avec une vitesse nulle.*

(Octobre 1911.)

Paris.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Analyse. — I. *Intégrer l'équation différentielle*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = e^x - x - 1.$$

Calculer l'intégrale y de cette équation qui s'annule pour $x = 0$, ainsi que sa dérivée première. Reconnaître si la fonction y ainsi obtenue passe par un maximum ou par un minimum pour $x = 0$.

II. *On considère l'intégrale curviligne.*

$$\int \frac{y(1 - x^2 + y^2)\,dx + x(1 + x^2 - y^2)\,dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}.$$

Démontrer que la valeur de cette intégrale, supposée étendue à un arc de courbe AB, *ne dépend que de l'origine* A *et de l'extrémité* B *de cet arc de courbe, et non des points intermédiaires. Calculer l'intégrale, lorsque, le point* A *étant l'origine des coordonnées, le point* B *a des coordonnées données x_1, y_1.*

III. *Soient* Ox, Oy *deux axes rectangulaires. Un point quelconque* M *d'une courbe* C *se projette sur* Ox *en* H *et la tangente en ce point rencontre* Ox *en* T.

1° *Déterminer toutes les courbes* C *telles que l'on ait*

$$\overline{\text{HO}}\,\overline{\text{HT}} = -1.$$

Construire celle de ces courbes (C_1) *qui passe par le point $x = 0$, $y = 1$, et calculer à* 0,01 *près les coordonnées de ses points d'inflexion.*

2° *On mène par* O *la parallèle à la droite symétrique de* MT *par rapport à* Ox. *Cette parallèle rencontre* MH *en* m. *Construire la courbe* C_2, *lieu de ce point* m, *quand* M *décrit* C_1.

3° *Évaluer l'aire comprise entre* C_1 *et* C_2.

Mécanique. — *On considère le système matériel suivant : Un fil inextensible, flexible et de poids négligeable,* *tout entier situé dans un plan vertical fixe, part d'un point fixe* O, *descend verticalement, passe sous le cercle de gorge d'une poulie mobile* (C) *et de poids* P, *remonte verticalement, passe sur le cercle de gorge d'une poulie* (C′) *mobile autour de son axe horizontal supposé fixe, redescend verticalement et supporte un poids solide* S *homogène, pesant, de poids* Q, *ayant la forme d'un cylindre de révolution dont l'axe est dans le prolongement du fil. A l'origine des temps, le système, étant supposé sans vitesse, est abandonné à lui-même.*

1° *Déterminer le mouvement du solide* S, *le mouvement de la poulie* (C) *et la tension du fil. Montrer que cette tension ne dépasse jamais* $\frac{P+Q}{3}$.

2° *On suppose que, dans le mouvement considéré, le solide* S *descende à l'instant* t_0, *on coupe le brin de fil qui porte ce solide; il s'écoule alors un nouvel intervalle de temps précisément égal à* t_0, *avant que la poulie* (C) *repasse par la position qu'elle occupait au début du mouvement. Calculer le rapport des poids* P *et* Q.

N. B. — *On supposera les poulies* (C) *et* (C′) *homogènes et leurs cercles de gorge parfaitement lisses.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Construire, sur une feuille de papier quadrillé, pour* x *variant de* 0 *à* 1, *la courbe*

$$y = \frac{1}{\log \frac{1}{x}}.$$

2° *Se servir de la courbe ainsi construite pour résoudre graphiquement l'équation*

$$(6x+1)\log\frac{1}{x} = 1.$$

3° *Calculer l'intégrale*

$$\int_{0,25}^{0,75} \frac{dx}{\log \frac{1}{x}}$$

au moyen de la formule de Simpson, l'intervalle d'inté-

gration étant partagé en dix parties égales. Comparer le résultat obtenu à celui que fournirait l'utilisation directe du quadrillage.

N. B. — *On prendra pour origine un des quatre sommets de la partie quadrillée de la feuille, et pour axe des x le plus petit côté. On choisira les unités d'abscisse et d'ordonnée, de manière que le sommet de la partie quadrillée de la feuille, opposé à l'origine, ait pour coordonnées $x = 1$, $y = 10$. On calculera directement les ordonnées de la courbe pour des abscisses variant de centimètre en centimètre et l'on inscrira les valeurs de ces ordonnées sur la feuille de papier quadrillé.*

Il n'est pas demandé une approximation plus grande que celle que comporte l'usage exclusif de la règle à calcul.

La rédaction contiendra des indications sommaires sur les procédés de calcul employés.

(Juin 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Analyse. — I. *Intégrer le système d'équations différentielles simultanées*

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = -x + t.$$

Déterminer la solution de ce système telle que pour $t = 0$ x et y prennent la valeur 0.

Si l'on regarde les fonctions x et y de t ainsi déterminées comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans un plan, ce point engendre, lorsque t varie, une certaine courbe (C). *Construire cette courbe.*

Calculer l'aire engendrée par la révolution autour de Oy *de l'arc de la courbe* (C) *obtenu en faisant varier t de* 0 *à* 2π.

II. *On donne, dans un plan, deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox *et* Oy. *On désigne par* M *un point quelconque d'une courbe* (C) *du plan, par* P *sa projection sur* Ox, *par* Q *le point d'intersection de* Oy *avec la tangente à la courbe* C *en* M.

Former l'équation différentielle des courbes (C) *qui* *jouissent de la propriété que l'aire du trapèze* OPMQ *est égale à une aire donnée* a^2. *Intégrer cette équation et construire celle des courbes* (C) *qui passe par le point dont les coordonnées sont* $x = a$, $y = a$.

Mécanique. — I. *On donne, dans un plan fixe, deux axes de coordonnées rectangulaires fixes* Ox *et* Oy. *Un point matériel* M, *de masse* m, *peut se mouvoir librement dans ce plan. Il se trouve que, sous l'action d'une certaine force parallèle à* Oy, *ce point admet comme trajectoire une circonférence* (C) *de centre* O *et de rayon* R. *On connaît la vitesse* v_0 *dont est animé le mobile au moment* $t = 0$ *où son abscisse est nulle.*

Calculer en fonction du temps les coordonnées du point M; *calculer en fonction de l'ordonnée du point* M *la vitesse de ce point et la force qui produit son mouvement.*

II. *On considère un plan incliné rugueux faisant, avec le plan horizontal, un angle donné* α. *Le coefficient de frottement est* f. *Un point matériel pesant de poids* P *est placé sur ce plan incliné. On lui applique une force égale à son poids et dirigée suivant l'horizontale du plan incliné qui passe par le point. On demande à quelle condition doit satisfaire* f, *l'angle* α *étant supposé donné pour que le point soit en équilibre.*

Épreuve pratique. — *On considère, dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, *la chaînette dont l'équation est*

$$y = \operatorname{ch} x \qquad \text{ou} \qquad y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Soit M *un point quelconque de la chaînette,* P *sa projection sur* Ox, A *le sommet de la chaînette. Déterminer le point* M *par la condition que l'on ait*

$$\mathrm{OA} + \mathrm{PM} = \mathrm{OP} + \operatorname{arc} \mathrm{AM}.$$

On calculera les coordonnées du point cherché M *à* $\frac{1}{1000}$ *près.* (Octobre 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Analyse. — I. *Intégrer le système d'équations différentielles*

$$\frac{dx}{dt} = 2x - y,$$

$$\frac{dy}{dt} = x + 4y - 5\sin t.$$

Déterminer une solution de ce système par la condition que x et y s'annulent pour $t = 0$, et calculer le premier terme non nul dans les développements en séries entières en t des fonctions x et y ainsi obtenues.

II. *Une courbe plane* (C) *est rapportée à deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *la tangente en un point quelconque* M *de la courbe* (C) *rencontre au point* T *l'axe* Oy.

Déterminer la courbe C, *de manière que l'angle* $\widehat{\mathrm{MFT}}$ *soit droit*, F *étant un point fixe situé sur* Ox, *à la distance* a *du point* O. *Discuter la nature de la courbe* (C) *obtenue suivant la valeur donnée à la constante d'intégration.*

III. *Étant donnés trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *on demande de calculer le volume du solide limité par le cylindre* $y = \operatorname{ch} x$, *par la surface* $\frac{z}{y} = \operatorname{th} x$, *et par les plans* $x = 0$, $x = 1$, $z = 0$. *On rappelle les formules :*

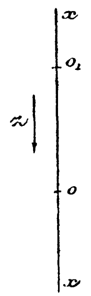
$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$$

Mécanique. — *Un point matériel pesant* M, *de masse* m, *se déplace dans un milieu qui lui oppose une résistance, dirigée en sens inverse de la vitesse de* M, *et d'intensité* $R = mg\frac{v^2}{K^2}$, *où* g *désigne l'accélération due à la pesanteur,* v *la valeur algébrique de la vitesse de* M *et* K, *un coefficient numérique. Soit* x'Ox *un axe orienté, la direction positive* Ox *étant celle de la verticale descendante.*

1° *A l'instant initial* M *est lancé du point* O *avec une vitesse* $v_0 = -a$ $(a > 0)$ *dirigée suivant la verticale ascen-*

dante Ox'. *On demande l'abscisse* $x = -h\ (h > 0)$ *du point le plus haut* O_1 *atteint par* M, *ainsi que le temps* T *employé par* M *pour aller de* O *à* O_1.

2° *On prendra désormais* O, *comme nouvelle origine des abscisses* (*la direction positive des abscisses étant tou-*



jours celle de la verticale descendante), *et l'instant où* M *est en* O, *comme nouvelle origine des temps. Sous l'action de la pesanteur et de la résistance* R, *le point* M *va descendre suivant la verticale* O_1Ox. *Donner les expressions*

$$v = \varphi(t) \qquad \text{et} \qquad x = f(t)$$

de la vitesse et de l'abscisse de M *à un instant quelconque* t.

3° *On admet que* K *est très grand, de telle sorte qu'on puisse négliger dans les calculs les puissances de* $\frac{1}{K}$ *supérieures à* 2.

Montrer que l'approximation précédente permet d'écrire

$$\varphi(t) = gt - \frac{At^3}{K^2},$$

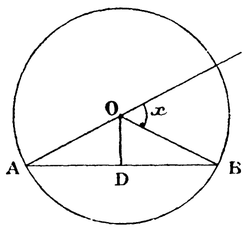
$$\psi(t) = \frac{gt^2}{2} - \frac{Bt^4}{K^2},$$

A *et* B *étant deux coefficients* (*ne dépendant que de* g) *que l'on calculera.*

Applications : $g = 980$; $K = 9{,}8 \times 10^5$; *calculer à l'instant* $t = 1$, $\varphi(t)$ *et* $\psi(t)$ *avec l'approximation permise au* 3°.

Épreuve pratique. — *Un récipient d'une contenance de* 10 *litres a la forme d'un cylindre de révolution limité par deux plans perpendiculaires à l'axe* (Δ) *du cylindre et situés à une distance de* 50^{cm} *l'un de l'autre. On verse* 2^{1} *de liquide à l'intérieur du récipient supposé placé de telle sorte que* (Δ) *soit horizontal.*

Soit (C) *la section du récipient par un plan* (P) *per-*



pendiculaire à (Δ), O *l'intersection de* (P) *avec* (Δ), AB *l'intersection de* (P) *avec la surface libre du liquide et* x *le supplément de l'angle* AOB.

1° *Former l'équation à laquelle satisfait* x.

2° *Résoudre cette équation avec la précision que comportent les Tables de logarithmes à cinq décimales.*

3° *Calculer en centimètres (avec la même précision) la distance* OD *de l'axe du récipient à la surface libre.*

(Juillet 1912.)

Épreuve théorique. — Analyse — I. *Intégrer l'équation différentielle*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = e^x \cos mx,$$

où m *désigne une constante donnée. Calculer l'intégrale qui, pour* $x = 0$, *s'annule, ainsi que sa dérivée première Calculer, à l'origine des coordonnées, le rayon de courbure de la courbe qui représente la variation de cette intégrale.*

II. *Étant donnés, dans un plan, deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, *on considère dans ce plan un courbe* (C). *Soit* M *un point quelconque de cette courbe;*

soit I *le centre de courbure de la courbe en* M; *soit* P *la projection du point* I *sur la parallèle à* Ox *menée par* M; *soit* Q *la projection du point* P *sur la normale* MI.

Former et intégrer l'équation différentielle des courbes (C), *telles que la longueur* QI *soit égale à une longueur donnée a. Indiquer la forme des courbes* (C).

III. *Construire la courbe représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$x(x^2+y^2)=y^2.$$

Évaluer à $\frac{1}{1000}$ *près l'aire comprise entre cette courbe et la droite* $x=1$, *ainsi que l'abscisse du centre de gravité de cette aire.*

Mécanique. — *Dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy *se meut un point matériel* M, *de masse égal à* 1, *de coordonnées* x *et* y. *Il est soumis à une force* F *dont les composantes, suivant les axes de coordonnées, sont* $X=-x$, $Y=-4y$.

1° *Chercher s'il existe une fonction de force* $U(x, y)$; *dans l'affirmative, déterminer* $U(x, y)$ *et construire les courbes de niveau* (S) *du champ* (H) *créé par la force* F.

2° *Former et intégrer les équations différentielles du mouvement du point* M.

3° M *étant abandonné sans vitesse initiale, à l'instant* $t=0$, *du point* A *de coordonnées* $x_0=1$, $y_0=1$, *donner les expressions*

$$x=f(t), \qquad y=g(t)$$

des coordonnées de M *à l'instant* t; *construire la trajectoire* (T) *correspondante et calculer la vitesse* v *à l'instant* t.

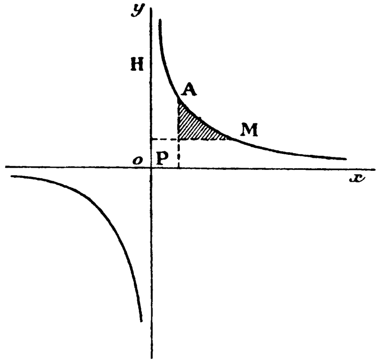
4° *Montrer qu'aux poins de* (T), *où la vitesse* v *est maximum ou minimum (sans être nulle), la trajectoire* (T) *est tangente à la courbe de niveau* (S) *passant par ces points.*

Épreuve pratique. — *Soient deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy *et l'hyperbole* (H) *d'équation*

$$xy=1.$$

Déterminer les coordonnées $x, y (x > 1, y < 1)$ *d'un point* M *de* (H) *satisfaisant à la condition suivante :*

Soit P *l'intersection de la parallèle à* Oy *menée par* M



avec la parallèle à Oy *menée par* A, A *étant le point de* (H) *d'abscisse* $x = 1$; *l'aire limitée par l'hyperbole* (H), *les droites* AP *et* PM, *doit être égale à* 1.

On calculera x *et* y *avec la précision que comportent les Tables de logarithmes à cinq décimales.*

N. B. — *On pourra d'abord calculer* y.

(Octobre 1912.)

Poitiers.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Soit*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + A_1(x)\frac{dy}{dx} + A_0(x)y = 0$$

une équation différentielle linéaire à coefficients quelconques. Montrer comment, si l'on connaît une intégrale particulière, on peut ramener le calcul de l'intégrale générale à l'intégration d'une équation linéaire du premier ordre.

II. *On considère l'équation linéaire*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{2y}{x^2} = \frac{2a}{x} \qquad (a > 0).$$

1° *Montrer qu'il existe une infinité de polynomes du second degré en x satisfaisant à cette équation.*

2° *Former l'intégrale générale de l'équation.*

3° *Construction des courbes intégrales et discussion suivant les valeurs des constantes d'intégration.*

4° *On considérera en particulier l'intégrale $Y_1(x)$ qui passe par les points $x = 1$, $y = a$ et $x = -1$, $y = a$, et l'intégrale $Y_2(x)$ qui passe par l'origine et par le point $x = 1$, $y = 0$. L'aire comprise entre les deux courbes correspondantes dans l'angle des coordonnées positives a-t-elle une valeur finie? La différence entre les deux portions de cette aire situées de part et d'autre de la droite $x = \frac{1}{2}$ a-t-elle une valeur finie?*

(Novembre 1911.)

Épreuve théorique. — I. Question de cours. — *Application des intégrales multiples à la détermination du centre de gravité d'un corps homogène.*

Exemples : 1° *Trouver les coordonnées du centre de gravité de la demi-sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ située au-dessus du plan des xy.*

2° *Trouver, par la méthode des intégrales triples, les coordonnées du centre de gravité du tétraèdre qui a pour sommets : l'origine des coordonnées O; le point A de l'axe des x qui a pour abscisse $2a$; le point b de l'axe des y qui a pour ordonnée $2b$; le point C qui a pour coordonnées $x_0 = a$, $y_0 = b$, $z_0 = c$ (on suppose a, b, c positifs).*

II. *Un fardeau, placé sur un plan rugueux incliné de 30° sur le plan horizontal, est soumis à une force F parallèle au plan incliné et dirigée vers le haut. On observe que le fardeau ne reste en équilibre que si F est compris entre certaines valeurs φ et Φ. Sachant que $\frac{\varphi}{\Phi} = 0,2$, calculer le coefficient du frottement du fardeau sur le plan.*

Épreuve pratique. — *Intégrer le système des équations* *différentielles*

$$\frac{dy}{dx} + 3y - 2z = e^x \sin x,$$

$$\frac{dz}{dx} - y + 4z = x.$$

(Juillet 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° *Déterminer la valeur de la constante a de manière que l'équation*

$$(1) \qquad (y' - y^2)\sin^2 x + ay \sin x \cos x + 1 = 0$$

admette la solution

$$y = \cot x.$$

2° *a étant ainsi déterminée, montrer que la différence* $y - \cot x$ *satisfait à une équation de Bernoulli et déduire de là l'intégrale générale de l'équation* (1).

II. 1° *Théorie des enveloppes dans le plan.*

2° *Application.*

Déterminer l'enveloppe des ellipses dont les axes de symétrie sont deux droites rectangulaires données et dont la mesure de l'aire est un nombre donné A.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère une fonction égale à* 1 *dans l'intervalle* $\frac{\pi}{3}$ *à* $\frac{\pi}{2}$ *et égale à* $x^2 - x$ *dans l'intervalle* $\frac{\pi}{2}$ *à* $\frac{7\pi}{3}$. *On demande de développer la fonction en série trigonométrique dans l'intervalle où elle est définie*

(Novembre 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Question de cours. — *Intégration d'une équation aux dérivées partielles linéaires du premier ordre à deux variables indépendantes.*

II. *On considère l'équation aux dérivées partielles*

$$(1) \qquad py - qx = 0.$$

1° *Trouver la solution générale de cette équation.*

2° *Montrer qu'il existe une famille de solutions, ou sur* *faces intégrales, qui sont des cônes droits ayant pour base le cercle de rayon* 1 *du plan* xy *dont le centre est à l'origine.*

3° *Montrer qu'il existe, d'autre part, une famille de surfaces intégrales qui sont des paraboloïdes de révolution autour de l'axe des* z.

4° *Soient* (P) *celui de ces paraboloïdes qui a pour sommet l'origine et pour paramètre* 1 *et* (C) *l'un quelconque des cônes définis plus haut, ayant son sommet au-dessus du plan des* xy. *On évaluera le volume et la surface du solide fini délimité par les deux corps* (P) *et* (C) [*portion commune aux deux corps, entre le plan des* xy *et le sommet du cône*].

III. 1° *Déterminer l'enveloppe* E *des circonférences* S *dont l'équation en coordonnées rectangulaires est*

$$x^2+y^2+2p\rho x-2p\rho y=0,$$

où p *est une constante et* ρ *un paramètre arbitraire.*

2° *Construire la courbe* E.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un enfant a fait tourner dans un plan vertical fixe une pierre de poids* P *attachée à l'extrémité* A *d'une ficelle de longueur* l *et de poids négligeable. Pour maintenir fixe l'autre extrémité* B, *sa main doit exercer une résistance* R. *On demande :*

1° *De montrer que le nombre* N *de tours de la pierre par unité de temps ne peut s'abaisser — sans que la ficelle cesse d'être tendue — au-dessous d'un certain minimum* n, *qu'on peut déterminer connaissant* l.

2° *De calculer la résistance* R *et d'étudier sa variation* (*en supposant* $N>n$) *quand la ficelle tourne.*

3° *De calculer le maximum* ε *de l'erreur relative* $\dfrac{R_0-R}{R}$ *que l'on commettrait en prenant pour* R *la valeur* R_0 *de* R *quand la pierre passe au point le plus bas* (*en supposant toujours* $N>n$).

4° *De déterminer pour quelles valeurs de* $\dfrac{N}{n}$ *on aura* $\varepsilon<\frac{1}{10}$.

5° *De calculer* F_0 *en grammes-poids quand* $N=n$ *et* $l=0^{m},50$.

(Juin 1913.)

Rennes.

Épreuve théorique. — *Intégrer l'équation de Bernoulli*

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{-x^3}{k^2 y},$$

où k désigne une constante, et déterminer la solution particulière telle que, pour $x = a$, on a $y = 0$. Construire la courbe définie par l'équation

$$y^2 = \frac{x^2}{k^2}(a^2 - x^2),$$

où a et k sont des constantes, les axes étant supposés rectangulaires.

Calculer l'aire limitée par la courbe, l'axe des x et les droites $x = 0$, $x = a$.

Dans le cas particulier où $k = 2\sqrt{2}\,a$, calculer la longueur de l'arc s, comptée à partir de l'origine. [*On vérifiera que, si l'on pose*

$$x = a \sin t,$$

on trouve

$$\frac{ds}{dt} = \frac{a}{2\sqrt{2}}(2 + \cos 2t).]$$

Dans le même cas particulier, calculer le rayon de courbure en un point M *de la courbe, en fonction du paramètre t.*

Épreuve pratique. — *On considère la courbe définie en coordonnées par les formules :*

$$\begin{aligned} x &= t^2 f''(t) - 2tf'(t) = 2f(t), \\ y &= t\, f''(t) - f'(t), \\ z &= f'(t). \end{aligned}$$

Calculer, en fonction de t, les cosinus directeurs de la tangente, la différentielle de l'arc, l'équation du plan osculateur et le rayon de courbure.

(Juin 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Dans un plan vertical rapporté à deux axes rectangulaires*, Ox (*horizontal*) *et* Oy (*vertical dirigé vers le haut*), *on considère deux droites :*

$$(\mathrm{D}) \qquad x = a,$$
$$(\mathrm{D}') \qquad x = -a.$$

Un point M *de masse égale à l'unité, placé entre ces deux droites, est soumis à l'action de son poids g et attiré vers chacune des droites* (D), (D′), *perpendiculairement à ces droites, en raison inverse de la distance.*

L'intensité de chaque force d'attraction est représentée par $\frac{ag}{d}$, *d désignant la distance variable du point* M *à la droite considérée :*

1° *Trouver, en fonction de l'abscisse x du point* M, *la résultante* F *de ces trois forces.*

2° *Soit* α *l'angle que forme* F *avec* Ox; *calculer* $\operatorname{tang}\alpha$, *former l'équation du second degré correspondante en* $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$, *et montrer que l'une des racines de cette équation est égale à* $\frac{x-a}{x-a}$.

3° *Trouver les lignes de force du champ résultant. Calculer pour l'une quelconque d'entre elles, en fonction de l'abscisse, le rayon de courbure et la longueur d'arc, comptée à partir du point d'abscisse* x_0.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Calculer l'intégrale indéfinie*

$$\int \frac{[(\mathrm{R}+a)t^2+(\mathrm{R}-a)]\,dt}{[(\mathrm{R}+a)^2t^2+(\mathrm{R}-a)^2](1+t^2)}.$$

2° *Calculer l'intégrale curviligne*

$$\int_{(\mathrm{C})} \frac{(x-a)\,dy - y\,dx}{(x-a)^2+y^2}$$

prise le long d'un cercle (C) *ayant pour centre l'origine, et pour rayon* (R), *en supposant que a désigne une constante positive, et que les axes* Ox, Oy *sont rectangulaires.*

(*On devra distinguer deux cas :*

$$1^\circ \quad R > a, \qquad 2^\circ \quad R < a.)$$

(Novembre 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Théorème de Meusnier.*

II. *On considère une courbe* (C) *rapportée à des axes rectangulaires* Ox, Oy, *et pour laquelle l'abscisse* x *de chaque point* M *s'exprime en fonction de l'angle* α *que forme la tangente avec* Ox *par la relation*

$$(1) \qquad x = a(1 - \cos\alpha).$$

Démontrer que l'ordonnée y *vérifie l'équation différentielle*

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a \sin^2\alpha}{\cos\alpha}.$$

Déduire de l'équation (2) *l'expression explicite de* y *en fonction de* α *et déterminer la constante d'intégration de façon que* y *s'annule pour* $\alpha = 0$.

La courbe (C) *étant ainsi définie, on demande d'en étudier la forme, d'en construire l'asymptote, de calculer le rayon de courbure, les coordonnées du centre de courbure, et la longueur d'arc, comptée à partir de l'origine des coordonnées.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Calculer l'intégrale définie*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1 + k^2 \operatorname{tang}^2\varphi},$$

k *désignant une constante positive.*

2° *Calculer l'intégrale*

$$J = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{[1 + x + k^2(1 - x)]} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx.$$

(Juin 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On donne le système d'équations* *différentielles*

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\sin t}{\cos t}\dfrac{dx}{dt}, \\ \dfrac{\cos t}{\sin t}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - \dfrac{x}{\sin^2 t} = -\dfrac{a\cos t}{\sin^2 t}. \end{cases}$$

1° *Former l'équation différentielle du premier ordre qui définit x en fonctions de t. Intégrer cette équation.*

2° *Vérifier que l'on a une solution du système donné* (1) *en prenant, pour les fonctions inconnues, x et y :*

$$(2) \quad \begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) - l\sin t, \\ y = a(\sin t - t\cos t) - l\cos t, \end{cases}$$

l désignant une nouvelle constante.

Montrer que cette solution se déduit de la solution générale en y ajoutant la condition que, pour $t = \frac{\pi}{2}$, on doit avoir

$$x = \frac{a\pi}{2} + l \qquad \text{et} \qquad y = a.$$

3° *Les formules* (2) *où l'on regarde t comme un paramètre définissent une courbe* (C), *rapportée à deux axes rectangulaires* Ox, Oy. *Calculer pour un point variable* M *de la courbe* C :

L'arc s compté à partir du point $t = 0$;

L'angle de la tangente avec Ox;

Le rayon de courbure;

Les coordonnées du centre de courbure.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère la courbe définie en coordonnées rectangulaires par les équations*

$$x = \sin^2 t - \cos^2 t,$$
$$y = 2t - 2\sin t\cos t,$$
$$z = 4\sin t.$$

Calculer :

1° *Les cosinus directeurs de la tangente;*

2° *L'arc compté à partir du point $t = 0$;*

3° *Le rayon de courbure et les cosinus directeurs de la normale principale.*

(Juin 1913.)