Nouvelles annales de mathématiques

M.-F. Egan

Note sur les courbes planes de genre un

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 369-371

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__369_0>

[M¹4b]

NOTE SUR LES COURBES PLANES DE GENRE UN;

PAR M. M.-F. EGAN,

Soit une courbe C de degré n et de genre 1. Considérons les courbes adjointes Φ de degré $n-2$, passant par les points doubles de C (qu'on peut supposer distincts l'un de l'autre) et par $n-2$ points Q pris sur C. Les courbes Φ dépendent linéairement d'un paramètre λ; soit

$$\Phi = f - \lambda g = 0$$

leur équation. Chacune d'elles rencontre la courbe C en deux points ϖ variables avec λ. Nous dirons qu'une courbe Φ est tangente à C lorsque ces deux points se confondent.

Il ressort de la théorie classique des courbes de genre 1 que quatre des courbes Φ sont tangentes à C; que le rapport anharmonique R des paramètres λ de ces quatre courbes est indépendant de la façon dont on a choisi les points Q; que R est un invariant pour toute transformation birationnelle de C; enfin, que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe C soit transformable en C′ est qu'on ait $R = R'$.

Dans le cas des cubiques, R est le rapport anharmonique des quatre tangentes issues d'un point de la courbe.

L'objet de cette Note est d'indiquer une démonstration très simple de ces propositions.

On peut exprimer les coordonnées d'un point de C par des fonctions elliptiques d'une variable u. Alors la fonction $\lambda(u) = f(x, y) : g(x, y)$ est du second ordre. En effet, la courbe $\Phi_0 = f - \lambda_0 g = 0$ rencontre C en deux points en dehors des points fixes, donc l'équation $\lambda(u) = \lambda_0$ admet deux solutions dans un parallélogramme des périodes. Supposons qu'on ait choisi pour g l'une des courbes Φ qui sont tangentes à C; soit u_0 l'affixe de son point de contact. Alors $\lambda(u)$ admet u_0 comme pôle double; on a donc

$$\lambda(u) = \mathrm{A}\, p(u - u_0) + \mathrm{B}.$$

Les valeurs de u autres que u_0, répondant aux points de contact de C avec celles des courbes Φ qui lui sont tangentes, sont visiblement les zéros de $\lambda'(u)$, c'est-à-dire $u_0 + \omega_1$, $u_0 + \omega_2$, $u_0 + \omega_3$. Les valeurs de λ répondant aux quatre courbes Φ tangentes à C sont donc

$$\infty, \quad \mathrm{A}e_1 + \mathrm{B}, \quad \mathrm{A}e_2 + \mathrm{B}, \quad \mathrm{A}e_3 + \mathrm{B};$$

d'où

$$\mathrm{R} = (\infty, e_1, e_2, e_3).$$

On voit que R garde sa valeur, soit qu'on fasse varier les points Q, soit qu'on soumette C à une transformation birationnelle. Il s'ensuit aussi que la condition $\mathrm{R} = \mathrm{R}'$ est nécessaire pour que C puisse se transformer en C'.

Pour montrer que cette condition est suffisante, on remarque que la valeur de R détermine celle de l'invariant absolu $g_2^3 : g_3^2$. Or, en mettant $u = hv$, on a

$$h^2 p(u; g_2, g_3) = p(v; h^4 g_2, h^6 g_3).$$

On peut donc considérer g_2 et g_3 comme déterminés lorsque $g_2^3 : g_3^2$ l'est. Donc, lorsque $\mathrm{R} = \mathrm{R}'$, on peut exprimer les coordonnées des points de C et de C' par des fonctions elliptiques ayant les mêmes invariants. Cela posé, on peut transformer soit C, soit C' en la cubique

$$x = \wp(u; g_2, g_3), \qquad y = \wp' u,$$

ce qui achève la démonstration.