NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

C. CLAPIER

Sur la recherche des surfaces minima

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 359-363

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__359_1>

[O¹6h]

SUR LA RECHERCHE DES SURFACES MINIMA;

PAR M. C. CLAPIER.

I. Considérons le champ des normales à une famille de surfaces $f(x, y, z) = \text{const}$. Par chaque point $M(x, y, z)$ de l'espace, il passe une droite de ce champ, MN dont les cosinus directeurs (c, c', c'') sont fonctions de (x, y, z); nous allons montrer que la courbure moyenne de la surface de la famille, qui passe en ce point, est donnée par la formule

$$(1) \qquad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -\left(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c'}{\partial y} + \frac{\partial c''}{\partial z}\right).$$

Nous avons en effet, sur une ligne de courbure de la surface, les formules d'Olinde Rodriguez

$$dx + R\,dc = 0, \qquad dy + R\,dc' = 0, \qquad dz + R\,dc'' = 0,$$

R étant positif quand NM est dirigé vers le centre de courbure correspondant.

La première équation peut s'écrire

$$dx + R\left(\frac{\partial c}{\partial x}dx + \frac{\partial c}{\partial y}dy + \frac{\partial c}{\partial z}dz\right) = 0$$

avec

$$c\,dx + c'\,dy + c''\,dz = 0.$$

Il en résulte que les dx et dy d'une ligne de courbure vérifient la relation

$$(2)\quad \left[c''\left(1+R\frac{\partial c}{\partial x}\right)-Rc\frac{\partial c}{\partial z}\right]dx+R\left(c''\frac{\partial c}{\partial y}-c'\frac{\partial c}{\partial z}\right)dy=0.$$

On trouverait de même la condition

$$(3)\quad R\left(c''\frac{\partial c'}{\partial x}-c\frac{\partial c'}{\partial z}\right)dx+\left[c''\left(1+R\frac{\partial c'}{\partial y}\right)-Rc'\frac{\partial c'}{\partial z}\right]dy=0.$$

Et l'élimination de dx et dy nous donne une équation du second degré qui est satisfaite pour les deux rayons de courbure R_1 et R_2. On en déduit

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=-\frac{c''\dfrac{\partial c}{\partial x}-c\dfrac{\partial c}{\partial z}+c''\dfrac{\partial c'}{\partial y}-c'\dfrac{\partial c'}{\partial z}}{c''};$$

en tenant compte de la relation

$$c\frac{\partial c}{\partial z}+c'\frac{\partial c'}{\partial z}+c''\frac{\partial c''}{\partial z}=0,$$

il vient la formule (1).

Pour appliquer cette formule, on déterminera c, c', c'' par les égalités

$$\frac{c}{\dfrac{\partial f}{\partial x}}=\frac{c'}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}=\frac{c''}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}.$$

Si la surface est donnée sous la forme $z=\varphi(x,y)$, c'' ne contient pas z, et si l'on pose $dz=p\,dx+q\,dy$,

$$X=\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\qquad Y=\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

nous avons

$$(4)\qquad \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=-\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right).$$

II. Une surface minima est telle que sa courbure moyenne est nulle en chacun de ses points $R_1 + R_2 = 0$.

D'après le résultat précédent, pour obtenir une famille de surfaces minima, nous devrons choisir trois fonctions uniformes c, c', c'' de (x, y, z), satisfaisant aux conditions

$$
(5) \qquad \begin{gathered} c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, \\ \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c'}{\partial y} + \frac{\partial c''}{\partial z} = 0, \end{gathered}
$$

et telles que l'équation aux différentielles totales

$$
c\,dx + c'\,dy + c''\,dz = 0
$$

soit intégrable.

On sait que la condition d'intégrabilité est exprimée par l'identité

$$
(6) \quad c\left(\frac{\partial c'}{\partial z} - \frac{\partial c''}{\partial y}\right) + c'\left(\frac{\partial c''}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial z}\right) + c''\left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial c'}{\partial x}\right) = 0.
$$

Appliquons au cas simple où l'on prend

$$
(7) \qquad c = \frac{-ay}{f(\rho)}, \qquad c' = \frac{ax}{f(\rho)}, \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}
$$

qui satisfont à la condition (5). Nous avons

$$
I = c'\frac{\partial c''}{\partial x} - c\frac{\partial c''}{\partial y} + c'\left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial c'}{\partial x}\right) = a\rho\frac{\partial c''}{\partial \rho} + ac''\frac{-2f + \rho f'}{f^2},
$$

avec

$$
f' = \frac{\partial f}{\partial \rho},
$$

et, en outre,

$$
c'' = \sqrt{1 - \frac{a^2\rho^2}{f^2}}, \qquad \frac{\partial c''}{\partial \rho} = -\frac{a^2(f\rho - f'\rho^2)}{c''f^3}.
$$

Égalant I à o, on trouve que $f(\rho)$ doit satisfaire à l'équation différentielle

$$
a^2\rho^2 - 2f^2 + ff'\rho = 0.
$$

Cette équation peut s'écrire

$$\frac{df^2}{d\rho} = 4\frac{f^2}{\rho} - 2a^2\rho;$$

elle est facilement intégrable comme équation linéaire et l'on trouve

$$f = \rho\sqrt{a^2 + \alpha\rho^2}. \tag{8}$$

Pour obtenir les surfaces minima correspondantes, nous porterons les valeurs (7) et (8) dans l'équation $c\,dx + c'dy + c''dz = 0$; ce qui nous donne

$$\alpha\,dz = a\,\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2};$$

d'où

$$\alpha z = a \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} + \beta, \tag{9}$$

qui représente une famille d'hélicoïdes gauches à plan directeur.

III. Parmi toutes les surfaces qui passent par un contour donné, celle dont l'aire est minima est une surface minima; autrement dit : toutes les surfaces minima qui passent par un même contour ont la même aire.

On peut démontrer cette propriété caractéristique en se servant de la condition (5). Soient, en effet, deux de ces surfaces limitant un volume τ et appliquons à ce volume la formule relative à la divergence d'un flux,

$$\int_V \left(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c'}{\partial y} + \frac{\partial c''}{\partial z}\right) d\tau = \int_S (\alpha c + \beta c' + \gamma c'')\,d\sigma,$$

α, β, γ étant les cosinus directeurs de la normale extérieure. La première intégrale est nulle d'après (5) et la seconde se réduit à

$$S_1 - S_2,$$

S_1 étant l'aire de la première surface minima et S_2 l'aire de la surface minima voisine qui passe par le même contour ; on a donc

$$S_1 = S_2.$$