Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 34-48

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__34_1>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Rennes.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Partie analytique. — 1° *Intégrer l'équation différentielle*

$$(1) \qquad \sin t \frac{dy}{dt} + 3 \cos t \, y = 3;$$

déterminer la solution de cette équation qui prend la valeur $\frac{3\pi}{4}$ *pour* $t = \frac{\pi}{2}$.

2° *Dans l'équation différentielle* (I), *faire le changement de variable défini par la relation*

$$\text{(II)} \qquad x = \sin^2 \frac{t}{2}$$

et montrer que l'équation transformée [*équation* (II)] *admet une solution de la forme*

$$y = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n + \ldots$$

les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ *étant des constantes. Déterminer ces coefficients et le rayon de convergence de la série.*

Vérifier que, si l'on différentie l'équation (II), *on obtient une équation du second ordre*

$$\text{(III)} \qquad 2x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + (5 - 10x)\frac{dy}{dx} - 6y = 0.$$

3° *Dans l'équation* (III) *faire successivement le changement de fonction inconnue et le changement de variable définis par les relations*

$$y = x^{-\frac{3}{2}} z,$$
$$x = 1 - x_1.$$

Montrer que l'équation différentielle ainsi obtenue admet une solution de la forme

$$z = x_1^n,$$

n étant un exposant constant convenablement déterminé.

II. Partie géométrique. — *On appelle s l'arc d'une courbe* (C); x, y, z *les coordonnées, par rapport à un trièdre trirectangle donné* $Oxyz$, *d'un point courant* M *de la courbe* (C); α, β, γ *les cosinus directeurs de la tangente en* M, *dans le sens des arcs croissants;* α', β', γ', α'', β'', γ'', *les cosinus directeurs de la normale principale et de la binormale;* R *et* T *les rayons de courbure et de torsion* (R *essentiellement positif,* T *positif ou négatif donné par les relations* $\frac{d\alpha''}{ds} = \frac{\alpha'}{T} \cdots$).

Si l'on a la relation $R = T$ *on a aussi les relations suivantes :*

$$\begin{aligned} \alpha - \alpha'' &= A, & A\alpha + B\beta + C\gamma &= 1, \\ \beta - \beta'' &= B, & A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'' &= -1, \\ \gamma - \gamma'' &= C, \end{aligned}$$

A, B, C *étant des constantes liées par la relation*

$$A^2 + B^2 + C^2 = 2.$$

Déduire de là que la courbe est une hélice tracée sur un cylindre dont les génératrices ont pour paramètres directeurs A, B, C.

En choisissant convenablement l'axe Oz, *on pourra supposer*

$$A = B = 0, \qquad C = \sqrt{2},$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \gamma'' = \frac{-1}{\sqrt{2}},$$

$$\alpha' = \beta\sqrt{2}, \qquad \beta' = -\alpha\sqrt{2}, \qquad \gamma' = 0.$$

Si l'on donne, outre $R = T$, *la relation* $R = s$, *on achèvera la détermination de la courbe* (C) *en posant*

$$\alpha = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}}, \qquad \beta = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}},$$

et l'on exprimera successivement s, x, y *et* z *au moyen de la variable* φ.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Soit la courbe*

$$\begin{aligned} x &= 6t + 6t^2 + 2t^3, \\ y &= 2 + 2t^3, \\ z &= -3 - 6t, \end{aligned}$$

l'arc de la courbe s'exprime rationnellement en t *par la formule*

$$ds = 6\sqrt{2}(1 + t + t^2)\,dt.$$

Les coordonnées d'un point quelconque de l'indicatrice des courbures s'expriment aussi rationnellement en

L'arc σ de cette indicatrice s'obtient par la formule

$$d\sigma = \frac{dt}{1 + t + t^2}.$$

Calculer les cosinus directeurs α, β, γ de la tangente, les cosinus directeurs α', β', γ' de la normale principale, le rayon de courbure.

Vérifier la relation

$$\alpha + \beta - \gamma = \sqrt{2}.$$

(Novembre 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Partie analytique. — *On donne le système d'équations différentielles*

$$\frac{dx}{dt} - yk\cos\theta = f(t),$$

$$\frac{dy}{dt} + k(x\cos\theta - z\sin\theta) = 0,$$

$$\frac{dz}{dt} + yk\sin\theta = 0,$$

où k et θ désignent des constantes et $f(t)$ une fonction connue de t.

1° *On suppose d'abord $f(t) \equiv 0$.*

Le système admet une solution pour laquelle la fonction y est identiquement nulle : quelle est cette solution ?

Trouver les trois solutions des équations sans second membre telles que, pour $t = 0$, on ait :

$x_1 = 0$,	$y_1 = -1$,	$z_1 = 0$	(1re solution),
$x_2 = \cos\theta$,	$y_2 = 0$,	$z_2 = -\sin\theta$	(2e solution),
$x_3 = \sin\theta$,	$y_3 = 0$,	$z_3 = \cos\theta$	(3e solution).

2° *On suppose que $f(t)$ n'est pas identiquement nulle.*

Indiquer les quadratures à effectuer pour obtenir une solution particulière du système donné.

Effectuer les calculs en supposant :

$$(\alpha) \qquad f(t) = -\frac{ak}{\cos\theta} \qquad (a \text{ constant}).$$

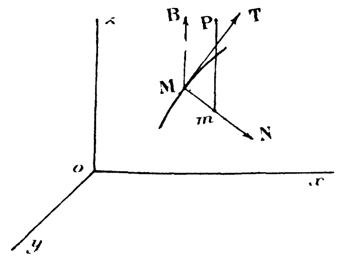
$$(\beta) \qquad f(t) = -a\,e^{ht} \qquad (a \text{ et } h \text{ constants}).$$

Partie géométrique. — *On donne, en axes rectangulaires, l'expression des coordonnées x, y, z d'un point quelconque* M *d'une courbe* C *en fonction de l'arc s de cette courbe;* MT *est la tangente dans le sens des arcs s croissants,* MN *la normale principale orientée de* M *vers le centre de courbure,* MB *la binormale orientée, de sorte que le trièdre* MTNB *ait même disposition que le trièdre de coordonnées* Oxyz.

Dans le plan normal en M *à la courbe* C *on mène une parallèle à la binormale, définie par la valeur l du segment* Mm, m *désignant le point où elle perce* MN. *On suppose que l est une fonction connue de s, de sorte que cette parallèle engendre une surface réglée* Σ. *On définit un point* P *de la génératrice par le segment* $m\mathrm{P} = u$.

1° *Équation par rapport aux axes* Oxyz *du plan tangent à* Σ *en* P.

2° *Il suffira de supposer que le trièdre* Oxyz *coïncide*



avec le trièdre de Serret relatif au point particulier M *pour déduire de ce qui précède l'équation du même plan tangent par rapport au trièdre* MTNB, *qui est*

$$\left(l' + \frac{u}{\mathrm{T}}\right)\mathrm{X} - \left(1 - \frac{l}{\mathrm{R}}\right)(\mathrm{Y} - l) = 0,$$

R *et* T *désignant le rayon de courbure et le rayon de torsion, l' étant la dérivée de l, $\frac{dl}{ds}$.*

3° *Quelle fonction de s faut-il prendre pour l, pour que la surface* Σ *soit développable?*

Plan tangent à la surface développable, arête de rebroussement de cette surface.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Intégrer l'équation aux dérivées partielles du premier ordre*

$$\frac{px}{2(x^2\ y^2)} + \frac{qy}{x^2 - 3y^2} = 0. \tag{1}$$

Vérifier, par un calcul direct, que l'équation (1) *et l'équation*

$$px + qy = z \tag{2}$$

admettent comme solution commune

$$z = \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 y}. \tag{3}$$

2° *On considère la surface* (S) *qui, rapportée à trois axes rectangulaires, est représentée par l'équation* (3) *et le solide* (Σ) *limité par la surface* (S) *et par les plans*

$$z = 0, \qquad z = c \qquad (c > 0).$$

Calculer :

L'aire de la section de (Σ) *par le plan* $z = z_1$;

Le volume de Σ;

Le moment d'inertie, par rapport à Oz, *du solide* (Σ *supposé homogène.* (Juin 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Partie analytique. — 1° *Intégrer l'équation différentielle de Lagrange*

$$x + py = a\sqrt{p^2 + 1}, \tag{1}$$

où a désigne une constante et $p = \dfrac{dy}{dx}$.

Exprimer les coordonnées x et y d'un point variable d'une courbe intégrale quelconque (γ) *en fonction de l'angle* α, *tel que* $\tan\alpha = p$.

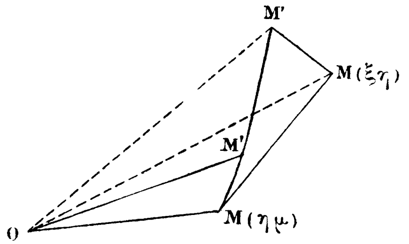
2° *Former l'équation différentielle* (2) *des trajectoires orthogonales des courbes* (γ). *Intégrer cette équation* (2) *et trouver son intégrale singulière.*

3° *L'équation différentielle* (1) *peut se mettre sous la* *forme*

$$r\,dr = a\,ds,$$

ds étant un arc infiniment petit d'une courbe (γ) *et r le rayon vecteur de l'origine de l'arc ds.*

Vérifier que, si l'on fait tourner une courbe (γ) *dans le*



plan (xOy) *autour du point* O *on obtient une nouvelle courbe intégrale.*

4° *Former l'équation différentielle des courbes* (γ) *en coordonnées polaires et intégrer cette équation en prenant pour variable l'angle* V *tel que* $\cos V = \dfrac{a}{r}$.

II. Partie géométrique. — *Sur une courbe plane* (C) *on fixe un sens positif arbitraire pour les arcs croissants et l'on appelle* α *l'angle de la direction positive* Ox *avec la tangente menée dans le sens des arcs s croissants.*

On prend pour expression algébrique du rayon de courbure le nombre $\gtrless 0$,

$$R = \frac{ds}{d\alpha};$$

pour expression algébrique de la distance de l'origine à la tangente, le nombre $\gtrless 0$,

$$p = x\sin\alpha = y\cos\alpha.$$

1° *On vérifie immédiatement que*

$$(x\cos\alpha + y\sin\alpha)\,d\alpha = d(x\sin\alpha - y\cos\alpha).$$

En déduire la formule

$$R = \frac{r\,dr}{dp},$$

en posant

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

2° *On sait que l'aire élémentaire* OMM′ *comprise entre le rayon vecteur* OM, *l'arc* MM′ *et* OM′ *a pour valeur*

$$dA = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx).$$

Sur chaque tangente on porte, dans le sens positif, une longueur constante a : *soit* μ *le point correspondant à* M; μ *décrit une courbe* (γ) *et a pour coordonnées* ξ, η.

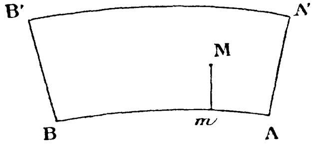
Vérifier que l'élément d'aire dB, *analogue à* dA, *relatif à la courbe* (γ), *a pour expression*

$$dB = dA - \frac{a}{2}\,dp + \frac{a^2}{2}\,d\sigma.$$

3° *On suppose la courbe* (C) *ovale et fermée; il en est de même de* (γ); *l'aire comprise entre* (C) *et* (γ) *a pour valeur* πa^2.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère un arc de courbe* AB *de longueur* (S) *ne présentant pas d'inflexion. Sur chaque normale on porte, du côté opposé à la développée, une longueur constante* L. *On définit ainsi un quadrilatère curviligne* ABA′B′.

Un point quelconque M *de cette aire peut être défini*



par la longueur s *de l'arc* Am *et la distance* M$m = l$, m *désignant le pied de la normale abaissée de* M *sur l'arc* AB.

Les courbes $s = \text{const.}$, $l = \text{const.}$ *forment un réseau orthogonal.*

1° *Évaluer la longueur de la courbe* $l = \text{const.}$; *vérifier qu'elle est égale à* $S + lV$, V *désignant l'angle des normales extrêmes.*

2° *Évaluer l'aire du rectangle infiniment petit compris entre les courbes* (l), $(l + dl)$, s, $(s + ds)$; *l'aire infiniment petite comprise entre la courbe* (l) *et la courbe* $(l + dl)$; *l'aire infiniment petite comprise entre la courbe* (s) *et la courbe* $(s + ds)$.

3° *Aire du quadrilatère* ABA'B'.

Vérifier les formules obtenues en supposant que l'arc AB *est un arc de circonférence.* (Novembre 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Trouver une solution du système d'équations différentielles*

$$(1)\quad \begin{cases} x\,dy - y\,dx = \dfrac{x\,dx + y\,dy}{k} = (x^2 - y^2)\,dt \\ dz = k\,z\,dt \end{cases} \qquad (k \text{ constant}),$$

telle que, pour $t = 0$, *on ait*

$$x = a, \qquad y = 0, \qquad z = c.$$

Les formules ainsi obtenues définissent une courbe (C). *Les axes étant rectangulaires, calculer, en fonction du paramètre* t, *l'arc* s *de la courbe* (C); *les cosinus directeurs* α_1, α_2, α_3 *de la tangente*; *les dérivées* $\dfrac{d\alpha_1}{ds}$, $\dfrac{d\alpha_2}{ds}$, $\dfrac{d\alpha_3}{ds}$; *le rayon de courbure, les cosinus directeurs de la normale principale, l'angle de la binormale avec* Oz, *le rayon de torsion pour un point variable de* (C).

2° *On donne le système d'équations différentielles*

$$(2)\quad \begin{cases} s\dfrac{d\alpha}{ds} - m\beta = 0 \\ s\dfrac{d\beta}{ds} + m\alpha + n\gamma = 0 \\ s\dfrac{d\gamma}{ds} - n\beta = 0 \end{cases} \qquad (m \text{ et } n \text{ constants}).$$

Former l'équation différentielle qui définit β *en fonction de s. Faire dans cette équation le changement de variable*

$$ds = ks\,dt \qquad \left(\frac{1}{k^2} = m^2 + n^2\right).$$

Trouver les intégrales β_1, β_2, β_3 *de l'equation différentielle ainsi obtenue, telles que, pour* $t = 0$, *on ait*

$$\begin{array}{lll} \beta_1 = 0, & \beta_2 = 1, & \beta_3 = 0, \\ \dfrac{d\beta_1}{dt} = -1, & \dfrac{d\beta_2}{dt} = 0, & \dfrac{d\beta_3}{dt} = 0. \end{array}$$

Calculer les fonctions α_1, α_2, α_3 *de* t, *qui correspondent à ces intégrales* β_1. β_2, β_3, *et qui, pour* $t = 0$, *prennent les valeurs*

$$\alpha_1 = mk, \qquad \alpha_2 = 0, \qquad \alpha_3 = \sqrt{1 - m^2 k^2}.$$

Calculer x, y, z *en fonction de t par les formules*

$$x = \int \alpha_1\,ds, \qquad y = \int \alpha_2\,ds, \qquad z = \int \alpha_3\,ds.$$

Les formules ainsi obtenues définissent une courbe (C'). *Vérifier que le système donné* (2) *représente les formules de Serret et Frenet pour la courbe* (C').

Épreuve pratique. — *Étant donnés trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *on considère la surface* (S) *définie par les formules*

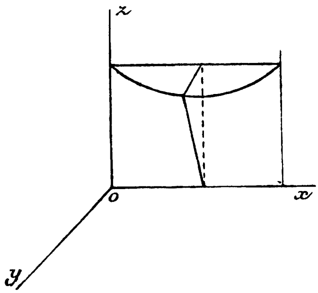
$$(\mathrm{S}) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= a \cos\theta \sqrt{\cos 2\theta}, \\ y &= a \frac{z}{c} \sin\theta \sqrt{\cos 2\theta}, \end{aligned} \right.$$

où a et c désignent des constantes, et θ *un paramètre qui varie de* $-\frac{\pi}{4}$ *à* $+\frac{\pi}{4}$.

1° *Montrer que le lieu des points de* (S) *pour lesquels* θ *a une valeur constante est une droite, que la surface* (S) *est un conoïde d'axe* Ox *et que la section de* (S) *par le plan* $z = c$ *est une lemniscate.*

2° *Calculer l'aire* A *de la section de* (S) *par un* *plan* $z =$ const. *et l'aire* A_1 *de la section de* (S) *par un plan* $x =$ const.

3° *Soit* (T) *le solide homogène limité par la surface* (S)



et par les plans $z = 0$, $z = c$. *Calculer le moment d'inertie de* (T) :

(α) *par rapport au plan* $x O y$:
(β) *par rapport au plan* $y O z$:
(γ) *par rapport à l'axe* $O y$. (Juin 1913.)

Toulouse.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° *En faisant usage du développement en série de* $\cot \frac{x-a}{2}$ *suivant les puissances de* e^{ix}, *calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^{2\pi} x \cot \frac{x-a}{2}\, dx$$

où l'on a

$$a = \alpha + i\beta.$$

2° *Montrer qu'on peut calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\, x\, dx,$$

où R *désigne une fonction rationnelle quelconque.*

II. 1° *L'équation aux dérivées partielles*

$$(1) \qquad z + f(\alpha, \beta) = 0,$$

où l'on a posé

$$\alpha = px + qy, \qquad \beta = py - qx,$$

a toujours des solutions communes avec une équation

$$(2) \qquad \mathrm{F}\left(\frac{p}{q}, x, y\right) = \text{const.}$$

dont le premier membre est une fraction du premier degré en $\frac{p}{q}$; *déterminer ces solutions communes en formant, puis intégrant l'équation* (2). *En conclure l'intégrale générale de* (1).

2° *Condition que doit remplir la fonction* $f(\alpha, \beta)$ *pour que les caractéristiques de* (1) *soient lignes asymptotiques sur les surfaces intégrales. Exemples simples.*

(Novembre 1909.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *On considère l'équation aux dérivées partielles*

$$(1) \qquad p^2 + q^2 = f^2(x, y).$$

a. Quelles sont sur chaque surface intégrale : 1° *les courbes trajectoires orthogonales des caractéristiques;* 2° *les courbes conjuguées des caractéristiques.*

Dans quels cas ces deux systèmes de courbes coïncident-ils ?

(*Interpréter géométriquement la condition trouvée.*)

b. Intégrer l'équation dans le cas où l'on a

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

c. Indiquer comment il faudrait choisir $f(x, y)$ *pour qu'il existe une équation*

$$(2) \qquad a(x, y)p + b(x, y)q = \text{const.}$$

linéaire en p et q et possédant en commun avec l'équation *donnée* (1) *une solution* z *dépendant d'une nouvelle constante.*

II. *Quelles sont les diverses déterminations de l'intégrale*

$$\int_0^z \frac{dz}{(z-a)\sqrt{1-z^2}}$$

quand on ne précise pas le chemin qui conduit du point o *au point* z *dans le plan complexe ?*

Épreuve pratique. — *Calculer par la théorie des résidus l'intégrale définie*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(at+b)\,dt}{(t^2+t+1)^3},$$

où a *et* b *sont deux paramètres réels arbitraires.*

Retrouver le résultat par l'emploi de l'intégrale indéfinie (décomposition en fractions simples).

(Juillet 1910.)

Épreuve théorique. — I. *On considère les surfaces* S *dont l'équation en coordonnées cartésiennes rectangulaires est*

$$z x^m \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \text{const.},$$

m *désignant un entier positif et* φ *une fonction arbitraire :*

1° *Déterminer, autant qu'on le peut en laissant* φ *arbitraire, leurs trajectoires orthogonales.*

2° *Peut-on grouper une simple infinité de ces courbes de manière à engendrer des cônes ayant pour sommet l'origine des coordonnées ?* Trouver ces cônes.

3° *Comment se déterminent les lignes asymptotiques des surfaces* S.

II. *L'angle solide sous lequel on voit d'un point* P *de coordonnées* (a, b, c) *une portion de surface* S, *entièrement limitée par une courbe* Γ, *ne dépend que de la courbe.* On demande de l'exprimer par une intégrale curviligne étendue à cette courbe Γ.

(Novembre 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Soient*

$$X = aZ + \alpha,$$
$$Y = bZ + \beta$$

les équations d'une droite en coordonnées cartésiennes rectangulaires.

1° *Montrer qu'il existe pour tous les complexes*

$$(1) \qquad \beta = \alpha f(a, b) + g(a, b),$$

quelles que soient les fonctions arbitraires f et g, des surfaces développables dont les normales appartiennent au complexe.

2° *Comment pourrait-on déterminer ces surfaces développables?*

3° *Trouver les surfaces développables dont les normales appartiennent au complexe*

$$(2) \qquad \frac{a\beta - b\alpha + 1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} = \text{const.}$$

4° *Trouver toutes les surfaces* (S) *dont les normales appartiennent au complexe précédent.*

[*On transformera, à défaut d'autre methode, l'équation aux dérivées partielles des surfaces* (S) *en introduisant au lieu des coordonnées cartésiennes* (x, y) *les coordonnées polaires* (ρ, ω).]

5° *Montrer que ces surfaces* (S) *sont égales aux surfaces qui leur sont parallèles.*

Que peut-on en conclure relativement à leurs lignes de courbure? (Novembre 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *On considère la famille de surfaces représentée en coordonnées cartésiennes rectangulaires par l'équation*

$$z x^m = a\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

où φ est une fonction donnée et a une constante arbitraire :

1° *Montrer que les lignes asymptotiques de ces surfaces peuvent s'obtenir par une quadrature.*

2° *Montrer que les trajectoires orthogonales de ces surfaces s'obtiennent aussi par une quadrature.* (*On établira d'abord que ces trajectoires sont placées sur des surfaces de révolution autour de* Oz.)

3° *Déterminer la fonction* φ *de manière que* z *satisfasse à l'équation aux dérivées partielles*

$$(p^2+q^2)x^2 = z^2$$

et intégrer cette équation.

II. *Exposer sommairement quelles sont les diverses déterminations de l'intégrale*

$$\int_{z_0}^{z}\left(\frac{1}{z-a}+\frac{z+b}{\sqrt{1-z^2}}\right)dz$$

suivant le chemin adopté pour aller, dans le plan complexe, du point z_0 *au point* z.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère la surface de révolution représentée par les équations*

$$x = \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega, \qquad z = f(\rho),$$

où x, y, z *sont les coordonnées d'un point* M *de la surface.*

Quelles courbes C *doit décrire le point* M *pour que l'arc décrit par sa projection* m *sur le plan* xOy *soit égal à* $a\,d\omega$.

Former explicitement les deux expressions dont la quadrature donnerait :

1° *Les trajectoires orthogonales des courbes* C, *sur la surface de révolution ;*

2° *L'arc de l'une de ces trajectoires, compté à partir du point où elle rencontre* xOy.

Exécuter ces quadratures dans l'hypothèse

$$z^2+\rho^2 = a^2.$$

(Juillet 1912.)