Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 325-332

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__325_0>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Caen.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° *Intégrer l'équation différentielle*

$$y''' - 2y'' + 4y' - 8y = \cos 2x + x^2 e^{2x}.$$

2° *Déterminer la solution* y *de cette équation telle que, si* x *est infiniment petit principal,* y *soit un infiniment petit du troisième ordre. Quelle est alors la partie principale des infiniment petits* y, $1 - \cos y$, *arc* $\sin y$, y — *arc* $\sin y$?

II. *Étant donnés trois axes rectangulaires* OX, OY, OZ :

1° *Montrer que les surfaces ayant pour équation*

$$\lambda^2(x^2 + y^2) - R^2[x^2 + y^2 + (z - \lambda)^2] = 0,$$

où R *désigne une longueur constante donnée et* λ *un paramètre arbitraire, sont des cônes de révolution autour de* OZ.

2° *Chercher l'enveloppe des génératrices de ces cônes situées dans le plan* XOZ. *En déduire la surface enveloppe de ces cônes.*

3° *Considérant, parmi les trajectoires orthogonales des génératrices précédentes, celles qui passent par un point donné (quelconque) du plan* XOZ, *dire à l'aide de quelle construction géométrique on peut obtenir les centres de courbure en ce point des trajectoires considérées.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *En désignant par* OX, OY *deux axes rectangulaires, et par* x, y *les mesures de l'abscisse et de l'ordonnée d'un point en centimètres, construire la courbe*

$$y = 10\, e^{-x^2} \sin 2x.$$

Déterminer en particulier, à 1^{mm} *près, la valeur de la première ordonnée maxima à droite de* OY.

2° *A partir de quelle valeur absolue de* x *la valeur absolue de l'ordonnée* y *reste-t-elle constamment inférieure à* $\frac{1}{10}$ *de millimètre ?*

3° *Calculer, d'une façon approchée, l'aire comprise entre* OX *et l'arc de courbe qui va du point* O *jusqu'au premier point de rencontre avec* OX *à droite de* O. *Indiquer l'approximation obtenue.*

(Juin 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° *Étudier la convergence de la série*

$$1 + 3x^3 + 6x^6 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} x^{3n-3} + \ldots.$$

2° *Vérifier que dans l'intervalle de convergence la somme* $y(x)$ *de cette série vérifie la relation différentielle*

$$(1 - x^3)y' - 9x^2y = 0.$$

Déduire de là une expression de la fonction $y(x)$ *qui la définisse pour toutes les valeurs de* x.

3° *Calculer* $Y = \int_0^x x^2 y\,dx$, *et développer cette fonction* Y *en série entière suivant les puissances de* x.

II. 1° *Étant donnés deux axes rectangulaires* OX, OY, *on propose de déterminer dans le plan* XOY *la courbe la plus générale satisfaisant à la condition suivante : si l'on désigne par* M *un point quelconque de la courbe, par* C *le centre de courbure de la courbe en* M, *et par* N *le point d'intersection de la normale en* M *avec* OX, *le point* N *doit être le milieu de la distance* MC. *Faire voir que cette courbe est une cycloïde engendrée par un cercle de rayon arbitraire roulant sans glissement sur* OX, *et à laquelle on a imprimé, parallèlement à* OX, *une translation arbitraire.*

2° *Assujettissant désormais la courbe à passer par le point* O, *considérant, parmi ses points d'intersection avec la partie positive de* OX, *celui qui est à la plus petite distance de* O, *et désignant par* A *le point dont il s'agit, on propose de déterminer le centre de gravité de l'arc* OA.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Les trois axes* OX, OY, OZ *étant rectangulaires, on considère l'ellipsoïde de révolution dont les trois demi-axes, respectivement dirigés suivant* OX, OY, OZ, *ont pour longueurs*

$$OA = OB = 1^{m}, \qquad OC = 2^{m}.$$

1° *Déterminer à* 1^{cm^3} *près le volume limité par l'ellipsoïde, le plan* XOY, *et le plan parallèle à* XOY *de cote* 75^{cm}.

2° *Déterminer à* 1^{cm} *près la cote d'un plan* P *parallèle à* XOY, *tel que le volume compris entre le plan* XOY, *le plan* P *et l'ellipsoïde soit égal à* 2^{m^3}.

Nota. — *On donne* $\pi = 3,1415926535\ldots$; *on prendra dans les calculs le nombre de décimales utiles.*

(Novembre 1912.)

Épreuve théorique. — I. 1° *Intégrer l'équation différentielle*

$$y'' - 3ay' + 2a^2y = (bx + 1)e^{bx}, \tag{1}$$

où a et b désignent des constantes données.

On exprimera l'intégrale générale dans les quatre cas suivants :

$$(\alpha) \qquad a \neq 0, \quad b \neq a, \quad b \neq 2a;$$

$$(\beta) \qquad a \neq 0. \quad b = a:$$

$$(\gamma) \qquad a \neq 0, \quad b = 2a;$$

$$(\delta) \qquad a = 0.$$

2° *Dans le cas*

$$a \neq 0, \quad b = a,$$

déterminer l'intégrale particulière de l'équation différentielle (1) *qui s'annule ainsi que sa dérivée pour* $x = -\dfrac{2}{a}$. *Quelle est, lorsqu'on fait varier a, l'enveloppe de la courbe intégrale correspondante ?*

3° *Pour* $b = a = 1$, *la courbe intégrale particulière spécifiée dans* 2° *est*

$$y = -\frac{e^x}{2}(x+2)^2.$$

Calculer l'aire comprise entre cette courbe, l'axe OY *et l'axe* OX.

II. *Étant donnés deux axes rectangulaires* OX, OY, *on considère les deux paraboles*

$$(\mathrm{P}) \qquad y^2 - 2px = 0,$$

$$(\mathrm{Q}) \qquad x^2 - 2qy = 0.$$

Sur (P) *on prend un point* M *de coordonnées* x, y; *la* *tangente en* M *à* (P) *rencontre la parabole* (Q) *en deux points* N, N'.

1° *Former l'équation dont les racines sont les abscisses des points* N *et* N', *et calculer les coordonnées* X, Y *du point* I, *milieu de* NN', *en fonctions de* y, *ordonnée de* M.

2° *Construire la courbe* C, *lieu du point* I

3° *Montrer que cette courbe* C *est tangente à la parabole* (P) *en un point* A *dont on calculera les coordonnées.*

Calculer le rapport des rayons de courbure de la courbe C *et de la parabole* (P) *au point* A.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Étant donnés deux axes rectangulaires* OX, OY, *sur lesquels les abscisses* x *et les ordonnées* y *sont mesurées en centimètres :*

1° *Construire la courbe*

$$y = x\,\mathrm{L}(1+x^2)$$

(L *désigne le logarithme népérien. On donne* L.10 = 2,3026).

On calculera à l'aide des Tables de logarithmes les ordonnées des points d'abscisses 1, 2, 3, *et les coefficients angulaires des tangentes en ces points.*

2° *Calculer avec trois décimales exactes, à l'aide du développement de* y *en une série entière par rapport à* x, *les ordonnées des points ayant respectivement pour abscisses*

$$0{,}25;\quad 0{,}5;\quad 0{,}75.$$

3° *Calculer avec deux décimales exactes l'abscisse du point ayant pour ordonnée* 1. (Juin 1913.)

Clermont-Ferrand.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Soient deux axes rectangulaires* Oxy. *On donne sur* Ox *les points* A *et* B *tels que* $\overline{OA} = l$, $\overline{BA} = nl$ $(l > 0)$. *On décrit les cercles* Γ *et* C *qui passent par* A *et ont pour centres respectifs les points* O *et* B. *On fait rouler, sans glissement,* C *sur* Γ *de manière que la vitesse angulaire du centre* O' *soit égale à* 1, *l'origine des temps étant l'instant où ce centre est en* B. *Calculer, en fonction de* t, *les coordonnées du point* M *de* C *qui se trouvait en* A *à l'origine des temps.*

2° *Construire le centre de courbure en* M *de cette trajec-*

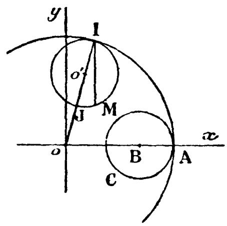


Fig. 1.

toire. Montrer qu'il divise MI *dans un rapport constant,* I *désignant le point de contact de* C *et* Γ.

3° *Construire les vecteurs vitesse et accélération du point* M. *On montrera que le vecteur accélération se trouve sur la droite symétrique de* MO *par rapport à* MI.

4° *Trouver les équations de la tangente et de la normale sous la forme canonique. En déduire que la développée se déduit de la trajectoire par une homothétie de centre* O, *suivie d'une rotation autour de* O. (Juin 1911.)

Epreuve théorique. — *On considère la parabole d'équation polaire* $r = \frac{1}{1 + \cos\theta}$. *On prend son sommet* A *pour origine des arcs, la demi-tangente positive en ce point ayant pour angle polaire* $+\frac{\pi}{2}$.

1° *Calculer, en fonction de* θ, *l'arc* AM $= s$, *l'angle polaire de la demi-tangente positive* MT, *l'aire du secteur* AOM *et le rayon de courbure en* M. *On vérifiera que la perpendiculaire en* O *à* OM *coupe le rayon de courbure en son milieu.*

2° *Un point matériel, de masse* 1, *est assujetti à décrire la parabole sans frottement. Il est, en outre, attiré par* O *suivant la force* $\frac{1}{r^2}$. *On le lance de* A, *dans le sens positif, avec la vitesse* v_0. *Déterminer et décrire le mouvement. Calculer la réaction en fonction de* θ. *Vérifier que, si* v_0 *est convenablement choisie, cette réaction est constamment nulle. Expliquer ce résultat.* (Novembre 1911.)

Épreuve théorique. — *Soient trois axes rectangu-*

laires $Oxyz$ *et le point* A *de* Oz *qui a pour cote* 1. *Sur* OA *comme diamètre, on décrit un cercle* (C) *dans le plan* yOz.

Soit d'autre part D *la première bissectrice de* $\widehat{zOx}$.

1° *On prend un point* P *sur* (C) *tel que l'angle de* Oy *avec* OP *soit égal à* φ. *On le joint au point* Q *de* D *qui a même cote. On obtient une droite* Δ, *dont on demande les équations. Trouver l'équation de la surface* (S) *qu'elle engendre quand* P *décrit* (C).

2° *On oriente* Δ *de* P *vers* Q. *Désignant par* M *un point quelconque de* Δ, *on pose* $\overline{PM} = \rho$. *Calculer les coordonnées de* M *en fonction de* ρ *et* φ.

3° *Ligne de striction de* (S) *et paramètre de distribution relatif à* Δ.

4° *Construire la section de* (S) *par le plan* $x = \frac{3}{8}$.

5° *Le point* M, *supposé de masse* 1, *est attiré par* O *suivant une force égale à* OM. *On l'abandonne de* P *sans vitesse initiale. Calculer* ρ *en fonction du temps. Calculer la réaction.*

Trouver les positions d'équilibre et l'équation polaire du lieu de leurs projections sur xOy. *Construire ce lieu.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer le système d'équations différentielles*

$$\frac{dx}{dt} = x - y - t - 2, \qquad \frac{dy}{dt} = y + t.$$

Déterminer une solution telle que $x = 0$, $y = 0$ *pour* $t = 0$. *Construire la courbe obtenue.*

Déterminer : 1° *l'aire comprise entre la courbe* Ox *et la droite* $x = 1$; 2° *l'aire comprise entre la courbe et la droite* $x = 1$.

Trouver les coordonnées des points d'inflexion à 0,01 *près.*

(Juin 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *La droite* $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$, *où* p *désigne une certaine fonction de* φ, *enveloppe une courbe* (C). *Soient* M *le point de contact,* N *le point de rencontre de la normale avec* Ox, P *la projection de l'origine sur la tangente.*

1° *Déterminer la fonction* p *pour que l'on ait constam-*

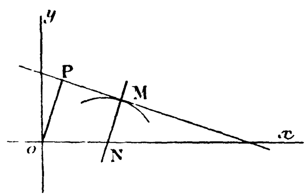
ment

$$\frac{\overline{\text{MN}}}{\overline{\text{PO}}} = 1 - n,$$

n désignant une constante donnée.

2° *Montrer que pour une certaine valeur de n les courbes* (C) *ainsi obtenues sont telles que le rayon de*

Fig. 1.

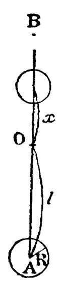


courbure en M *soit fonction linéaire de p. Parmi les courbes parallèles à* (C), *il y en a alors une dont le rayon de courbure est triple de la normale limitée à* Ox.

3° *Construire une des courbes* (C) *trouvées dans* (2°) *et calculer sa longueur totale.*

II. *Une tige homogène, d'épaisseur négligeable, de masse m, de longueur* $2l$, *peut tourner autour d'un axe horizontal* O, *qui lui est perpendiculaire en son milieu. A une extrémité* A *est fixée une sphère homogène, de*

Fig. 2.



rayon R, *de masse* M *et de centre* A. *Le long de* OB *peut glisser une sphère identique à la première et dont on fixe le centre à une distance quelconque x de* O. *On obtient de la sorte un pendule composé dont on demande la durée* *d'oscillation. Variations de cette durée quand x croît de o à l. Calculer la longueur du pendule simple synchrone, en négligeant les rapports $\frac{m}{M}$ et $\frac{R}{l}$.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer les équations*

$$y' \pm y = A e^x + B e^{-x} + C \cos(x + \alpha) + x^3.$$

(Novembre 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Soient un trièdre trirectangle* $Oxyz$ *et le point* A *de* Ox *qui a pour abscisse* $+1$. *On considère le cylindre* (C), *qui admet pour section droite le cercle décrit dans* xOy *sur* OA *comme diamètre, et le cône de révolution* (C′), *qui a pour sommet* A, *dont l'axe de révolution est parallèle à* Oz *et dont l'angle au sommet vaut un droit. Ces deux surfaces se coupent suivant une ligne* (Γ).

1° *Calculer les coordonnées d'un point quelconque* M *de cette ligne en fonction de l'angle polaire* φ *de sa projection sur* xOy.

2° *Trouver les équations des projections de* (Γ) *sur les plans de coordonnées et construire ces projections.*

3° *Trouver l'équation du conoïde droit qui a pour axe* Oz *et dont les génératrices s'appuient sur* (Γ). *Prouver que les plans qui passent par* Ox *coupent ce conoïde suivant des ellipses. Lieux des sommets et des foyers de ces ellipses.*

4° *Montrer que* (Γ) *est une sphère* (Σ) *de centre* O *et calculer l'aire de la surface qui limite le volume commun à* (C) *et* (Σ).

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Trouver une solution de l'équation différentielle*

$$y'' + \frac{2}{a} y' + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) y = 0,$$

telle que $y = h$, $y' = 0$, *pour* $x = 0$.

Construire la courbe qui représente cette fonction.

Déterminer les points où la tangente est parallèle à Ox, *et le rayon de courbure en ces points.* (Juin 1913.)