Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1913)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 316-324

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__316_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1913).

Mathématiques spéciales.

I. *Par deux points fixes* A *et* A′ (AA′ $= 2a$), *on fait passer un cercle variable de centre* C; *un cercle de rayon a passe par le point* C *et son centre* C′ *est sur la perpendiculaire à* AA′ *en son milieu, le vecteur* $\overline{\mathrm{CC'}}$ *ayant toujours le même sens. Construire le lieu* Γ *des points communs aux deux cercles.* (*On pourra exprimer les coordonnées d'un point du lieu en fonctions d'un paramètre.*)

II. *Une droite variable* D *perpendiculaire à* AA′ *rencontre* Γ *en quatre points* M_1, M'_1, M_2, M'_2; *au* *point* M_1 *on peut associer un point* M'_1 *tel que le milieu du segment* $M_1M'_1$ *décrive un cercle* Γ_1 ; *montrer que les droites* AM_1, $A'M'_1$ *sont rectangulaires. Construire le lieu des milieux de tous les segments déterminés sur* D *par* Γ.

III. *Les hyperboles équilatères qui passent par* A *et* A′ *rencontrent* Γ *en quatre points formant deux couples de points associés* M_1 *et* M'_1 ; *si l'on suppose un de ces couples constitué par deux points fixes, le lieu des centres des hyperboles correspondantes est un cercle; quel est le lieu du centre de ce cercle et quelle est l'enveloppe de ce cercle, quand on fait varier les points associés supposés fixes primitivement ?*

IV. *Les hyperboles équilatères qui passent par* A *et* A′ *et sont tangentes à* Γ *se distribuent en plusieurs faisceaux ponctuels et une famille constituée par des hyperboles bitangentes à* Γ.

On considère deux hyperboles H_1 *et* H_2 *qui font partie de cette famille et sont tangentes à* Γ, *l'une en* M_1 *et* M'_1, *l'autre en* M_2 *et* M'_2, *ces quatre points étant en ligne droite; montrer que la droite qui joint le milieu de* $M_1M'_1$ *au point de rencontre* M *des tangentes à* Γ *en* M_1 *et* M'_1 *est tangente au cercle* Γ_1.

H_1 *et* H_2 *ont une corde commune qui ne passe par aucun des points* A, A′; *soit* P *le point où cette corde rencontre* AA′; *trouver l'enveloppe de* MP.

Solution par M^lle L. GRUMEAU, à Poitiers.

I. Prenons pour axes AA′ et la perpendiculaire en son milieu O. Soient (C) et (C′) les cercles mobiles de centre C et C'. Si l'ordonnée de C est λ, leurs équations respectives sont

$$(C) \qquad x^2+y^2-2\lambda y = a^2,$$
$$(C') \qquad x^2+y^2-(2\lambda+a)y+\lambda^2+2\lambda a = 0,$$

qui donnent pour les points de rencontre

$$y = \frac{(\lambda+a)^2}{2a}, \qquad x^2 = \frac{(\lambda^2+a^2)(3a^2-\lambda^2)}{4a^2}.$$

Pour simplifier l'écriture, posons

$$a^2+\lambda^2 = 2ap,$$

d'où

$$\lambda = \pm\sqrt{a(2p-a)}.$$

Alors

$$y = p+\lambda, \qquad x^2 = p(2a-p);$$

on en déduit pour l'équation de Γ

$$(x^2+y^2)^2+4ay(x^2-y^2)-2a^2(x^2-y^2)-4a^3y+a^4 = 0.$$

A chaque valeur de p correspondent deux valeurs opposées de λ, donc quatre points, d'abscisses

$$\pm\sqrt{p(2a-p)}$$

et d'ordonnées

$$p\pm\sqrt{a(2p-a)}$$

que nous désignerons par y_1 et y_2.

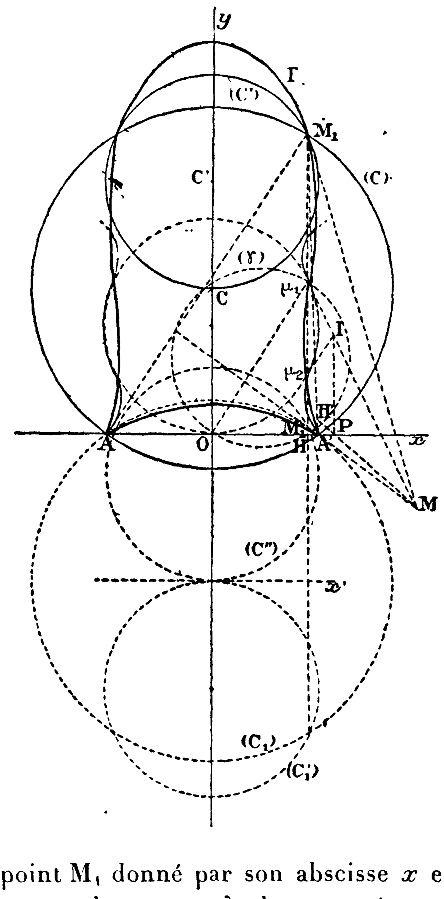
Pour construire Γ, il nous suffit de faire varier p de $\frac{a}{2}$ à $2a$ et à cause de la symétrie par rapport à Oy, nous ne prendrons que la valeur positive de x. La variation se résume en

p	$\frac{a}{2}$		a		$2a$
y_1	$\frac{a}{2}$	$\nearrow$	$2a$	$\nearrow$	$a(2+\sqrt{3})$
y_2	$\frac{a}{2}$	$\searrow$	a	$\nearrow$	$a(2-\sqrt{3})$
x	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	a	$\searrow$	0.

On en déduit la forme de la courbe donnée sur la figure. Elle présente deux rebroussements en A et A′ et les tangentes sont à 45° sur les axes.

II. Quand on se donne x, on a p par l'équation $p^2 - 2ap + x^2 = 0$. A chaque racine correspondent deux valeurs opposées pour λ, donc deux points réels ou imaginaires dont le milieu μ_1 a pour ordonnée p et la relation $x^2 + p^2 - 2ap = 0$ montre que μ_1 est sur un cercle Γ_1 de rayon a tangent à AA′ en O, ce qui détermine l'association demandée des points M_1, M'_1; ceux-ci devront donc correspondre à la même valeur de p.

Des considérations géométriques donnent facilement ce résultat. Faisons subir : 1° une symétrie par rapport à AA′ à toute la figure, (C) vient en (C_1) et (C′) en (C'_1); 2° une symétrie par rapport à une parallèle à AA′ menée par C_1 au cercle (C'_1) qui vient en (C″) et coupe (C_1) en M'_1. Il est facile de reconnaître qu'à un point M du lieu correspond ainsi un autre point M'_1 également du lieu, mais ces deux opérations équivalent à une translation -2λ parallèle à Oy. Le milieu μ_1 de $M_1M'_1$ se déduit donc de M_1 par une translation parallèle à Oy et égale à $-\lambda$, ce qui amène le cercle (C') en Γ_1 tangent à AA'. Ces opérations montrent en même temps que M'_1 est l'orthocentre de AM_1A'.



A un point M_1 donné par son abscisse x et correspondant aux valeurs p et λ des paramètres, on peut faire correspondre son associé $(p_1 - \lambda)$ et le lieu du milieu est Γ_1 ou l'autre racine p' de $p^2 - 2ap + x^2 = 0$ avec les deux valeurs $\pm\lambda'$ correspondantes, les milieux ont alors pour ordonnées $y = \frac{p+\lambda+p'\pm\lambda'}{2}$ en tenant compte de $p+p'=2a$ et $pp'=x^2$, on en déduit l'équation du lieu

$$a^2x^2 = (y-a)^4 - a^2(y-a)^2 + a^4.$$

Le lieu se compose de deux branches symétriques par rapport à Oy. En ne s'occupant que de la branche $x>0$, on voit qu'elle aura même forme générale que celle de la courbe représentant la variation du trinome bicarré

$$(y-a)^4 + a^2(y-a)^2 + a^4$$

et les parties pour lesquelles $|x|<a$ correspondent seules à des points réels sur Γ_1.

III. Une hyperbole équilatère H_1 passant par A, A', rebroussements de Γ, n'a évidemment que quatre autres points communs avec cette courbe du quatrième degré. Soit M_1 l'un d'eux, nous avons vu que son associé M'_1 est l'orthocentre de AM_1A', il est donc sur H_1 et si l'on suppose M_1, M'_1 fixes, le lieu du centre de H_1 est le cercle des neuf points (γ) du même triangle. Si N_1, N'_1 sont les deux autres points associés sur H_1 à AN_1A' ou AN'_1A' correspondrait un second cercle (γ'), le centre de H_1 est à l'intersection de γ et γ' et par suite symétrique de O par rapport à la ligne des centres de ces deux cercles. Le centre de (γ) est le milieu de $O\mu_1$, il décrit donc un cercle (Γ_2) homothétique à (Γ_1) dans le rapport $\frac{1}{2}$ et qui sera par suite tangent lui-même à AA' en O avec un diamètre a.

Quand M_1 et M'_1 varient, (γ) varie en passant par O; il touche son enveloppe au symétrique de O par rapport à la tangente au lieu de son centre, c'est-à-dire au pied de la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente à (Γ_1) menée en μ_1 ; cette enveloppe est donc la podaire de (Γ_1) pour le point O, c'est-à-dire une cardioïde ayant O pour rebroussement et (Γ_2) pour base.

IV. Une hyperbole H_1 passant par A, A' et M_1 sera tangente à (Γ) en ce point si un deuxième point vient se confondre avec lui. Ce deuxième point peut être son associé M'_1 mais nous avons vu que deux points associés correspondent à la même valeur de p et à des valeurs opposées de λ, ce qui entraîne $\lambda = 0$, $p = \frac{a}{2}\cdot$ Il y a ainsi deux points M_1 $\begin{cases} x = \pm a, \\ y = \frac{a}{2}\cdot \end{cases}$

En chacun de ces points les hyperboles sont tangentes à la courbe et par suite à une parallèle à Oy. Comme elles passent par A et A', elles forment deux faisceaux ponctuels. Si le point qui vient se confondre avec M_1 n'est pas son associé, soit N_1 ce point, alors l'associé N'_1 de N_1 vient aussi se confondre avec M'_1 associé de M_1 et l'hyperbole est bitangente à (Γ). Une telle hyperbole aura pour centre le point où (γ) touche son enveloppe, c'est-à-dire le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente en μ_1 à Γ_1.

Considérons une hyperbole H_1 rencontrant Γ aux points associés M_1, M'_1 et N_1, N'_1, les milieux des segments correspondants étant μ_1 et ν_1, la figure $N_1 M_1 M'_1 N'_1$ est un trapèze et les côtés non parallèles sont concourants avec la droite joignant les milieux des bases. Cette propriété aura encore lieu si N_1 se rapproche indéfiniment de M_1 et montre que les tangentes en M_1 et M'_1 à (Γ) sont concourantes avec la tangente en μ_1 à (Γ_1). $M\mu_1$ est pour H_1 le diamètre conjugué de la direction Oy.

Les hyperboles H_1 et H_2 déterminées par les points associés M_1, M'_1 (milieu μ_1) et M_2, M'_2 (milieu μ_2) auront leur seconde corde commune BB′ perpendiculaire à AA′, car par A, A′, B, B′ passent deux hyperboles équilatères et par suite l'un des quatres points est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres. Le milieu I de BB′ est donc à la fois sur les tangentes à (Γ_1) en μ_1 et μ_2, donc à leur point de rencontre, par suite si H est le pied de $M_1M'_1$ sur AA′, AHA′P forment une division harmonique. La polaire de H par rapport à l'hyperbole H_1 passe donc par P; elle passe d'autre part au pôle M de $M_1M'_1$, c'est donc la droite MP et elle rencontre $HM_1M'_1$ en H′ conjugué de H par rapport à $M_1M'_1$. Les coordonnées de P sont $\frac{a^2}{x}$ et O (x étant l'abscisse de H).

Celles de H′ sont x et $\frac{2y_1y_2}{y_1+y_2} = \frac{(p-a)^2}{p}$; l'équation de MP est donc

$$\begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ \frac{a^2}{x} & 0 & 1 \\ x & \frac{(p-a)^2}{p} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$Xx + pY - a^2 = 0$$

en tenant compte de $a^2 - x^2 = (p-a)^2$; cette équation montre que MP est encore la polaire du point $\mu_1(x, p)$ par rapport au cercle fixe

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

Quand le point μ_1 décrit (Γ_1), la droite enveloppe donc la conique, polaire réciproque de (Γ_1) par rapport à

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

(Γ_1) passant par O, centre de ce cercle, cette polaire réciproque sera une parabole ayant O pour foyer, Oy pour axe, $y = a$ pour directrice et d'équation

$$x^2 + 2ay - a^2 = 0.$$

Il est évident que toutes les propriétés de l'énoncé peuvent s'étendre à des coniques en en faisant soit une tranformation homographique, soit une perspective. Si I et J sont les homologues des points cycliques, l'homologue de (C) sera une conique passant par les homologues de A, A′ et par I et J, le pôle de IJ décrivant l'homologue de Oy. L'homologue de (C′) sera une conique passant par I, J et le pôle de IJ, tangente aux deux droites allant de A et A′ au point de rencontre de IJ avec l'homologue de Oy. Mais il est à remarquer qu'à un cercle (C) ne correspondait qu'un cercle (C′) parce que le vecteur CC′ avait un sens déterminé, cette restriction n'est plus possible quand on passe aux coniques. On trouverait donc, en même temps que la quartique homologue de (Γ), une deuxième quartique homologue de (Γ′), (Γ′) étant la symétrique de (Γ) par rapport à AA′.