Nouvelles annales de mathématiques

Paul Suchar

# Sur une classe d'équations différentielles linéaires, transformables en elles-mêmes par un changement de la fonction et de la variable

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 14 (1914), p. 303-316

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__303_0>

[H5e]

# SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES, TRANSFORMABLES EN ELLES-MÊMES PAR UN CHANGEMENT DE LA FONCTION ET DE LA VARIABLE;

PAR M. PAUL SUCHAR,
Professeur au Lycée de Pau.

1. M. Appell, dans son Mémoire (*Acta mathematica*, 1891), avait étudié et avait donné l'intégrale d'une classe étendue des équations différentielles linéaires et homogènes, transformables en elles-mêmes par un changement de la variable et par un changement linéaire de la fonction. Je me propose d'intégrer une classe d'équations différentielles, différente de celle étudiée par M. Appell et transformables en elles-mêmes par un changement de la variable et de la fonction qui n'est plus linéaire.

2. Toute équation différentielle linéaire et homogène du second ordre peut toujours être ramenée, comme on sait, à la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)y. \tag{1}$$

Effectuons le changement de la variable et de la fonction en posant

$$x = \varphi(t), \tag{2}$$

$$z = \frac{dy}{dx}, \tag{3}$$

où $\varphi(t)$ est continue, admet une dérivée et de plus la fonction $\varphi(t) - t$ a au moins un zéro. Supposons que l'équation (1) soit transformable en elle-même, c'est-à-dire soit transformable en une autre qui ne diffère de (1) que par le changement de $x$ en $t$ et de $y$ en $z$. Si cette condition est réalisée, l'équation (1) admet au moins une solution $y = F(x)$, vérifiant la relation

$$(F'_x)_{x=\varphi(x)} = A\,F(x),$$

où A est une constante, c'est-à-dire que l'équation (1) admet au moins une solution telle que, si sur la dérivée de cette fonction on effectue la substitution $x = \varphi(x)$, on obtient sa primitive à un facteur constant près.

En effet, si $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont deux solutions linéairement indépendantes de (1), les fonctions

$$[F'_1(x)]_{x=\varphi(t)}, \qquad [F'_2(x)]_{x=\varphi(t)}$$

sont aussi solutions de la même équation et l'on aura

$$[F'_1(x)]_{x=\varphi(t)} = a_1 F_1(t) + b_1 F_2(t),$$
$$[F'_2(x)]_{x=\varphi(t)} = a_2 F_1(t) + b_2 F_2(t).$$

Si l'on pose

$$F(x) = \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x),$$

on pourra déterminer les constantes $\lambda_1$, $\lambda_2$ de manière à avoir

$$(F'_x)_{x=\varphi(t)} = A\,F(t),$$

où A est une solution de l'équation

$$\begin{vmatrix} a_1 - A & a_2 \\ b_1 & b_2 - A \end{vmatrix} = 0.$$

3. Différentions la relation (3), on a

$$\frac{dz}{dt} = \varphi'(t) f[\varphi(t)] y;$$

différentions à nouveau cette dernière relation, on a, en ayant égard à (3),

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = y \frac{d}{dt} \{ \varphi'(t) f[\varphi(t)] \} + \varphi'^2(t) f[\varphi(t)] z.$$

L'équation (1) sera transformable en elle-même si l'on a

$$\frac{d}{dt} \{ \varphi'(t) f[\varphi(t)] \} = 0, \qquad \varphi'^2(t) f[\varphi(t)] = f(t).$$

La première nous donne

$$(4) \qquad \varphi'(t) f[\varphi(t)] = a,$$

$a$ étant la constante d'intégration, d'où l'on déduit

$$(5) \qquad f(t) = a \varphi'(t).$$

La fonction $f(t)$ sera donc déterminée si l'on se donne la fonction $\varphi(t)$. Si dans cette dernière relation nous changeons $t$ en $\varphi(t)$ et si nous multiplions les deux membres par $\varphi'(t)$, on aura

$$\varphi'(t) f[\varphi(t)] = a \varphi'(t) [\varphi'(t)]_{t=\varphi(t)},$$

d'où il résulte, d'après (4),

$$\varphi'(t) [\varphi'(t)]_{t=\varphi(t)} = 1,$$

qu'on peut encore écrire

$$\frac{d}{dt} \{ \varphi[\varphi(t)] \} = 1;$$

d'où, en intégrant cette dernière relation depuis $t_0$ à $t$, $t_0$ étant un zéro de $\varphi(t) - t$, on trouve que la fonction $\varphi(t)$ supposée donnée doit être solution de l'équation fonctionnelle

$$\varphi[\varphi(t)] = t,$$

équations dont toutes les solutions ont été déterminées par M. Lattès dans son article *Sur les courbes invariantes par polaires réciproques* (*Nouvelles Annales*, juillet 1906), en posant, comme l'indique son raisonnement ainsi que son calcul,

$$t = \mathrm{F}(u) - \Phi(u),$$
$$x = \varphi(t) = \mathrm{F}(u) + \Phi(u),$$

où F et $\Phi$ sont deux fonctions arbitraires, l'une paire, l'autre impaire, définies dans le domaine de $u = 0$.

En résumé, l'équation (1) est transformable en elle-même par le changement (2) et (3) si la fonction $\varphi(t)$ vérifie la relation

$$\varphi[\varphi(t)] = t,$$

et si la fonction $f(t)$ est le produit de la dérivée d'une de ces solutions $\varphi(t)$ par une constante arbitraire. Remarquons que l'on peut particulariser la valeur de la constante $a$ sans diminuer la généralité de la fonction $f(t)$, car deux déterminations de $f(t)$ qui ne diffèrent que par un facteur constant peuvent être considérées comme identiques; on aura donc

$$f(t) = \varphi'(t), \tag{6}$$
$$\varphi[\varphi(t)] = t, \tag{7}$$
$$f(t)f[\varphi(t)] = 1; \tag{8}$$

cette dernière s'obtient en différentiant la relation (7).

Il s'ensuit, d'après ce qui précède, que *la dérivée d'une solution de l'équation* (1) *sur laquelle on fait la substitution* $x = \varphi(x)$ *est une solution de la même équation* et ces deux solutions forment en général un système fondamental de l'équation (1).

4. Nous allons déterminer l'intégrale générale, nous allons la donner à l'aide d'un développement bien

connu. Soient $x_0$ une valeur de $x$ pour laquelle la fonction $f(x)$ est finie et déterminée et $x_0$ à $x$ un intervalle donné où la fonction $f(x)$ est finie et déterminée pour toutes les valeurs de $x$ dans cet intervalle; enfin désignons par A et B les valeurs que prennent la fonction $y$ et sa dérivée pour $x = x_0$. Intégrons deux fois entre $x_0$ et $x$ les deux membres de l'équation (1), on aura

$$y = \mathrm{A} + \mathrm{B}(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx;$$

multiplions les deux membres par $f(x)$, on a, d'après (1),

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{A}f(x) + \mathrm{B}(x - x_0)f(x) + f(x)\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx;$$

en intégrant à nouveau et en continuant ainsi, on trouve

$$\begin{aligned}(9)\quad y = {} & \mathrm{A}\Big[1 + \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \\ & \qquad + \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + \ldots\Big] \\ & + \mathrm{B}\Big[x - x_0 + \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} (x - x_0) f(x) \\ & \qquad + \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} (x - x_0) f(x)\,dx + \ldots\Big] \\ & + \mathrm{R}_n.\end{aligned}$$

Le terme complémentaire

$$\mathrm{R}_n = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \ldots \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,y\,dx$$

est une intégrale multiple d'ordre $2n$, si les deux suites précédentes renferment $n$ termes. La loi de formation des termes est déterminée, chaque terme se déduit du précédent en le multipliant par $f(x)\,dx^2$, et en effectuant deux intégrations successives entre $x_0$ et $x$. Je dis que le terme complémentaire $R_n$ tend vers zéro lorsque $n$ croît et que les deux suites sont absolument convergentes. En effet, soient $m$ et M le maximum du module de la fonction $f(x)$ et $y$, dans l'intervalle de $x_0$ à $x$; on a

$$\operatorname{mod}\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx < m.\operatorname{mod}\frac{(x-x_0)^2}{2!},$$

$$\operatorname{mod}\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx < m^2 \operatorname{mod}\frac{(x-x_0)^4}{4!},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

de même pour les termes coefficients de B,

$$\operatorname{mod}\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} (x-x_0) f(x)\,dx < m.\operatorname{mod}\frac{(x-x_0)^3}{3!}, \quad \ldots,$$

et

$$\operatorname{mod} R_n < M m^n \operatorname{mod}\frac{(x-x_0)^{2n}}{2n!};$$

donc, *a fortiori*,

$$\begin{aligned}\operatorname{mod} y < {} & \frac{1}{2}\operatorname{mod} A\left(e^{(x-x_0)\sqrt{m}} + e^{-(x-x_0)\sqrt{m}}\right)\\ & + \frac{1}{2\sqrt{m}}\operatorname{mod} B\left(e^{(x-x_0)\sqrt{m}} - e^{-(x-x_0)\sqrt{m}}\right)\\ & + M \operatorname{mod}\frac{\left[(x-x_0)\sqrt{m}\right]^{2n}}{2n!};\end{aligned}$$

or, $\operatorname{mod}\dfrac{\left[(x-x_0)\sqrt{m}\right]^{2n}}{2n!}$ peut devenir plus petit qu'une quantité donnée $\varepsilon$, si $n$ croît, et si nous désignons par $\alpha$ le maximum de l'expression

$$\begin{aligned}& \frac{1}{2}\operatorname{mod} A\left(e^{(x-x_0)\sqrt{m}} + e^{-(x-x_0)\sqrt{m}}\right)\\ & + \frac{1}{2\sqrt{m}}\operatorname{mod} B\left(e^{(x-x_0)\sqrt{m}} - e^{-(x-x_0)\sqrt{m}}\right),\end{aligned}$$

dans l'intervalle de $x_0$ à $x$, valeur qui d'ailleurs est indépendante de $n$, on aura

$$\operatorname{mod} y < \alpha + M\varepsilon,$$

inégalité qui a lieu pour toutes les valeurs de $x$ dans l'intervalle considéré; on peut donc remplacer, dans l'inégalité précédente, $\operatorname{mod} y$ par son maximum et l'on a

$$M < \alpha + M\varepsilon,$$

d'où

$$M < \frac{\alpha}{1 - \varepsilon}.$$

Par conséquent M ne peut pas devenir infini; donc le terme complémentaire $R_n$, dont le module est moindre que $M \operatorname{mod} \frac{[(x - x_0)\sqrt{m}]^{2n}}{2n!}$, tend vers zéro, et les deux séries précédentes sont absolument convergentes, puisque $R_n$ tend encore vers zéro si A ou B est nul. On remarque que les deux fonctions définies par ces séries sont linéairement indépendantes et comme chacune d'elles est une solution de l'équation différentielle (1), l'intégrale générale est donc

$$y = A\,u(x) + B\,v(x), \tag{10}$$

en posant

$$\begin{aligned} u(x) = 1 &+ \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \\ &+ \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + \ldots, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} v(x) = x - x_0 &+ \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} (x - x_0) f(x)\,dx \\ &+ \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} (x - x_0) f(x)\,dx + \ldots. \end{aligned} \tag{12}$$

5. Supposons que la fonction $f(x)$ au lieu d'être arbitraire, soit donnée par la relation (6) et que la fonction $\varphi$ vérifie la relation (7); supposons de plus que la limite inférieure des intégrales qui figurent dans (11) et (12) soit un zéro de la fonction

$$\varphi(x) - x; \tag{13}$$

on remarque, d'après (8), qu'on a

$$\operatorname{mod} f(x_0) = 1;$$

par conséquent la fonction $f(x)$ est finie pour $x = x_0$ et les deux séries définies par (11) et (12) sont encore convergentes. Je dis que l'une quelconque de ces fonctions est égale à la dérivée de l'autre après avoir remplacé $x$ par $\varphi(x)$. En effet, les termes de (11) s'écrivent en effectuant une première intégration

$$\begin{aligned} u(x) = 1 &+ \int_{x_0}^{x} [\varphi(x) - x_0]\, dx \\ &+ \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx \int_{x_0}^{x} [\varphi(x) - x_0]\, dx + \ldots. \end{aligned} \tag{14}$$

Remarquons que l'on peut encore écrire les termes de cette dernière série, à partir du troisième, comme il suit : la dérivée du troisième terme étant

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx \int_{x_0}^{x} [\varphi(x) - x_0]\, dx,$$

on a identiquement

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx \int_{x_0}^{x} [\varphi(x) - x_0]\, dx \\ &\quad \equiv \int_{x_0}^{\varphi(x)} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} [\varphi(x) - x_0]\, dx, \end{aligned} \tag{15}$$

obtenue en remplaçant dans la limite de l'intégrale et dans l'élément différentiel $x$ par $\varphi(x)$ et en ayant égard à (8). En effet, posons

$$s = \int_{x_0}^{\varphi(x)} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} [\varphi(x) - x_0]\, dx;$$

changeons dans cette fonction $x$ en $\varphi(x)$ et prenons la dérivée par rapport à $x$, on aura

$$f(x)\,(s'_x)_{x=\varphi(x)} = \int_{x_0}^{\varphi(x)} [\varphi(x) - x_0]\, dx,$$

changeons dans cette dernière égalité $x$ en $\varphi(x)$, on a, en ayant égard à (7) et (8),

$$s'_x = f(x) \int_{x_0}^{x} [\varphi(x) - x_0]\, dx,$$

fonction qui est aussi la dérivée par rapport à $x$ de la fonction

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx \int_{x_0}^{x} [\varphi(x) - x_0]\, dx;$$

donc cette fonction et la fonction $s$, ayant même dérivée, diffèrent par une constante, et comme ces fonctions s'annulent pour $x = x_0$, cette fonction est donc nulle et la relation (15) a donc lieu; on a donc, en multipliant les deux membres de (15) par $dx$ et en intégrant entre $x_0$ et $x$,

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx \int_{x_0}^{x} [\varphi(x) - x_0]\, dx$$
$$= \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} [\varphi(x) - x_0]\, dx.$$

La dérivée du quatrième terme de (14) étant

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx \int_{x_0}^{x} [\varphi(x) - x_0]\, dx,$$

on démontre de la même manière qu'on a identiquement

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \int_{x_0}^{x} [\varphi(x)-x_0]\,dx$$
$$\equiv \int_{x_0}^{\varphi(x)} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} [\varphi(x)-x_0]\,dx;$$

d'où, en multipliant les deux membres par $dx$ et en intégrant entre $x_0$ et $x$, le quatrième terme de (14) sera donc remplacé par

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} [\varphi(x)-x_0]\,dx,$$

et ainsi de suite; donc la fonction $u(x)$ peut s'écrire

$$(16)\quad u(x) = 1 + \int_{x_0}^{x} [\varphi(x)-x_0]\,dx$$
$$+ \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} [\varphi(x)-x_0]\,dx + \ldots,$$

où chaque terme se déduit du précédent en changeant $x$ en $\varphi(x)$, en le multipliant par $dx^2$ et en intégrant une première fois entre $x_0$ et $\varphi(x)$ et une deuxième fois entre $x_0$ et $x$.

Une remarque analogue sera faite sur les termes de la fonction $v(x)$ donnée par (12); ainsi la dérivée par rapport à $x$ du deuxième terme de $v(x)$ étant

$$\int_{x_0}^{x} (x-x_0) f(x)\,dx,$$

si l'on change dans la limite de l'intégrale et dans l'élément différentiel $x$ en $\varphi(x)$ et en ayant égard à (8), on a identiquement

$$\int_{x_0}^{x} (x-x_0) f(x)\,dx \equiv \int_{x_0}^{\varphi(x)} [\varphi(x)-x_0]\,dx;$$

posons, comme précédemment,

$$\alpha = \int_{x_0}^{\varphi(x)} [\varphi(x) - x_0]\, dx,$$

changeons dans cette relation $x$ en $\varphi(x)$ et en dérivant par rapport à $x$, on a

$$f(x)(\alpha'_x)_{x=\varphi(x)} = \varphi(x) - x_0.$$

Changeons dans cette relation $x$ en $\varphi(x)$, on aura, d'après (7) et (8),

$$\alpha'_x = (x - x_0) f(x);$$

on a donc

$$\alpha = \int_{x_0}^{x} (x - x_0) f(x)\, dx,$$

puisque les deux fonctions

$$\int_{x_0}^{x} (x - x_0) f(x)\, dx \quad \text{et} \quad \int_{x_0}^{\varphi(x)} [\varphi(x) - x_0]\, dx$$

s'annulent pour $x = x_0$; donc ces deux fonctions sont identiques, par conséquent,

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} (x - x_0) f(x)\, dx \equiv \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} [\varphi(x) - x_0]\, dx.$$

On démontre de même que le terme suivant de $v(x)$ peut être remplacé par

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} [\varphi(x) - x_0]\, dx,$$

et ainsi de suite, la loi de formation des termes étant la même que pour la fonction $u(x)$; donc la fonction $v(x)$ sera définie par

$$(17) \quad \begin{aligned} v(x) = x - x_0 &+ \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} [\varphi(x) - x_0]\, dx \\ &+ \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} dx \int_{x_0}^{\varphi(x)} [\varphi(x) - x_0]\, dx + \ldots; \end{aligned}$$

Sous cette forme, on reconnaît que chacune des fonctions $u(x)$ et $v(x)$ données par (16) et (17) est la dérivée de l'autre après avoir fait la substitution $x = \varphi(x)$; on peut donc poser

$$v(x) = (u'_x)_{x=\varphi(x)}, \tag{18}$$

et comme ces fonctions, comme nous l'avons vu, sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (1), son intégrale générale est donc

$$y = \mathrm{A}\, u(x) + \mathrm{B}(u'_x)_{x=\varphi(x)}.$$

6. Les deux fonctions $u(x)$ et $(u'_x)_{x=\varphi(x)}$ étant deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle (1), les fonctions

$$\left\{\begin{aligned} \omega(x) &= u(x) + (u'_x)_{x=\varphi(x)}, \\ \pi(x) &= u(x) - (u'_x)_{x=\varphi(x)}, \end{aligned}\right. \tag{19}$$

forment aussi un système fondamental de l'équation (1). Si nous prenons la dérivée de ces fonctions, on a, en ayant égard à l'équation (1) et (8),

$$\begin{aligned} \omega'(x) &= \omega[\varphi(x)], & \pi'(x) &= -\pi[\varphi(x)], \\ (\omega'_x)_{x=\varphi(x)} &= \omega(x), & (\pi'_x)_{x=\varphi(x)} &= -\pi(x). \end{aligned}$$

Il s'ensuit qu'à chaque fonction $\varphi(x)$, solution de (7), correspond une équation différentielle (1) et cette équation admet un couple de solutions formant un système fondamental et tel que *si dans l'une d'elles on fait la substitution* $x = \varphi(x)$, *on obtient au signe près sa dérivée, de même si sur la dérivée de l'une d'elles on fait la même substitution, on obtient sa primitive au signe près et à une constante près.*

M. Lattès, dans sa Thèse (*Sur les équations fonc-*

*tionnelles*, etc., Paris, 1906), et en se plaçant à un autre point de vue, a donné, à la page 92, un exemple d'une fonction telle que sa dérivée se déduise de la fonction en effectuant sur la variable une substitution donnée.

7. Comme application, considérons le cas où $\varphi(x) = x$, dans ce cas la fonction (13) admet en particulier pour zéro $x = 0$, en prenant pour limite inférieure des intégrales $x_0 = 0$, et en mettant à la place de $\varphi(x)$ sa valeur $x$ dans les fonctions $u(x)$ et $v(x)$, c'est-à-dire $(u'_x)_{x=\varphi(x)}$, on trouve que les fonctions $\omega(x)$ et $\pi(x)$ sont représentées par les développements des fonctions exponentielles $e^x$ et $e^{-x}$.. Ce résultat est d'ailleurs évident, car dans ce cas particulier $f(x) = 1$ et l'équation (1) est alors

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y.$$

2° Si $\varphi(x) = -x$, la fonction (13) n'admet qu'un seul zéro, $x = 0$, en le prenant pour limite inférieure des intégrales, on trouve que les fonctions $u(x)$ et $v(x)$ représentent la première le développement de $\cos x$ et la dernière le $\sin x$, donc $\omega(x)$ et $\pi(x)$ sont données par

$$\omega(x) = \cos x + \sin x,$$
$$\pi(x) = \cos x - \sin x.$$

Quant à l'équation différentielle (1), elle est, dans ce cas,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y.$$

3° Considérons en dernier lieu $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, les zéros de la fonction (13) sont $x = \pm 1$ si l'on prend pour limite inférieure des intégrales $x_0 = 1$, on trouve

$$\omega(x) = \sqrt{x}\left[3\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right)\right],$$

$$\pi(x) = \sqrt{x}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right)\right].$$

On remarque, en effet, qu'il suffit de changer $x$ en $\frac{1}{x}$ pour obtenir les dérivées de ces fonctions au signe près. Enfin, on remarque aussi que dans ce cas l'équation (1) est

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}y,$$

équation qui se ramène, comme on sait, à une équation du même ordre à coefficients constants.