

Concours d'admission à l'École polytechnique en 1913

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 14
(1914), p. 235-239

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__235_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1914, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1915.

I.

Composition d'Algèbre et Trigonométrie.

On considère la fonction θ de x définie par la relation

$$\text{arc tang } x = \frac{x}{1 + \theta x^2},$$

où le premier membre représente un arc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

1° Déterminer les valeurs limites de θ pour $x = \pm \infty$ et $x = 0$.

2° Suivre ces variations de la fonction $\theta(x)$ quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$.

3° Dans cette fonction $\theta(x)$, on remplace x par n^p , n étant un entier variable et p un nombre positif donné; on considère la série dont le terme de rang n a pour valeur $\theta(n^p)$. Pour quelles valeurs de p la série est-elle convergente?

4° Calculer

$$\int_a^\infty \frac{x}{1+x^2} \theta(x) dx.$$

Étudier la variation de cette intégrale quand a augmente de $-\infty$ à $+\infty$.

5° Calculer, à l'approximation de la règle à calcul, la valeur numérique de

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^\infty \frac{x}{1+x^2} \theta(x) dx.$$

SOLUTION PAR M. THIÉ.

1° On a

$$\theta = \frac{x - \text{arc tang } x}{x^2 \text{ arc tang } x} = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\text{arc tang } x} - \frac{1}{x} \right).$$

La seconde forme de θ montre que cette fonction prend la valeur 0 pour $x = \pm \infty$. Pour x tendant vers 0, on a, par le développement en série de la première forme,

$$\theta = \frac{\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots}{x^3 - \frac{x^5}{3} + \dots}.$$

Donc, pour $x = 0$, θ prend la valeur $\frac{1}{3}$.

2° Comme la fonction θ est visiblement paire, il

suffit de l'étudier pour $x > 0$. Calculons la dérivée de θ :

$$\theta' = -\frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{\text{arc tang } x} - \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{x} \left[\frac{-1}{(\text{arc tang } x)^2} - \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x^2} \right];$$

x étant positif, θ' a le signe de la quantité

$$u = x^3 (\text{arc tang } x)^2 \theta' = 2 (\text{arc tang } x)^2 - x \text{ arc tang } x - \frac{x^2}{1+x^2}.$$

Pour $x = 0$, u s'annule. Calculons la dérivée de cette fonction :

$$\begin{aligned} u' &= 4 \text{ arc tang } x \frac{1}{1+x^2} - \text{arc tang } x - \frac{x}{1+x^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2} \\ &= \text{arc tang } x \frac{3-x^2}{1+x^2} - \frac{x(3+x^2)}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

Pour $x \geq \sqrt{3}$, u' est négatif. Pour $x < \sqrt{3}$, u' a le signe de la quantité

$$V = \text{arc tang } x - \frac{x(3+x^2)}{(1+x^2)(3-x^2)}.$$

V s'annule encore pour $x = 0$. Calculons la dérivée

$$V' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(1+x^2)(3-x^2)(3+3x^2) - x(3+x^2)(4x-4x^3)}{(1+x^2)^2(3-x^2)^2}.$$

Par un calcul sans difficulté, on trouve que cette expression se réduit à

$$V' = \frac{-8x^2}{(3-x^2)(1+x^2)^2},$$

V' est donc négatif pour $0 < x < \sqrt{3}$, et la fonction V est décroissante dans cet intervalle. Elle est donc négative. Par suite, la dérivée u' est négative pour toutes les valeurs positives de x . On conclut de même que la fonction u et par conséquent la dérivée θ' sont négatives. La fonction θ est décroissante.

En résumé, quand x varie de 0 à ∞ , la fonction θ

décroit de $\frac{1}{3}$ à 0 ; c'est une fonction paire, et la courbe représentative se construirait sans difficulté.

3° On a

$$n^p \theta(n^p) = \frac{1}{\operatorname{arc tang} n^p} - \frac{1}{n^p} = \frac{1}{\operatorname{arc tang} n^p} \left(1 - \frac{\operatorname{arc tang} n^p}{n^p} \right).$$

Cette expression tend vers $\frac{2}{\pi}$, quand n augmente indéfiniment. On en déduit immédiatement, par application d'un théorème classique, que la série considérée est convergente pour $p > 1$ et divergente pour $p \leq 1$.

4° On a

$$\begin{aligned} \int_a^\infty \frac{x}{1+x^2} \theta(x) dx &= \int_a^\infty \frac{1}{1+x^2} \left(\frac{1}{\operatorname{arc tang} x} - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \int \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{\operatorname{arc tang} x} dx - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{x dx}{1+x^2} \\ &= \left\{ L \left| \frac{\operatorname{arc tang} x \sqrt{1+x^2}}{x} \right| \right\}_a^\infty. \end{aligned}$$

Pour $x = \infty$, la fonction obtenue prend la valeur $L \frac{\pi}{2}$. On a donc, en appelant $f(a)$ l'intégrale donnée,

$$f(a) = L \frac{\pi}{2} - L \frac{\operatorname{arc tang} a \sqrt{1+a^2}}{a} = L \frac{\pi a}{2 \operatorname{arc tang} a \sqrt{1+a^2}}.$$

On a supprimé le signe de la valeur absolue après le symbole L , car la quantité

$$\frac{\pi a}{2 \operatorname{arc tang} a \sqrt{1+a^2}}$$

est toujours positive.

La fonction $f(a)$ est paire. Pour $a = 0$, elle prend la valeur $L \frac{\pi}{2}$. Pour $a = \infty$, elle prend la valeur 0. Dans tout l'intervalle elle est décroissante. On a en effet

$$f'(a) = - \frac{a}{1+a^2} \theta(a) < 0.$$

La courbe représentative de cette fonction est donc analogue à celle de la fonction θ .

5° Il s'agit de calculer

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= L \frac{\pi \frac{1}{\sqrt{3}}}{2 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{1}{3}}} = L \left[\frac{1}{\frac{\pi}{4} \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{\sqrt{3}}} \right] \\
 &= L \left[\frac{\pi}{4} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{6}\right)} \right] = L \frac{3}{2} \\
 &= \frac{\log_{10} 3 - \log_{10} 2}{\log_{10} e} = \frac{0,477 - 0,301}{0,434} = \frac{0,176}{0,434} = 0,405.
 \end{aligned}$$