Nouvelles annales de mathématiques

J. Malaise

Sur une formule d'approximation pour les nombres de Bernoulli, très grands

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 174-179

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__174_1>

[D6cδ]

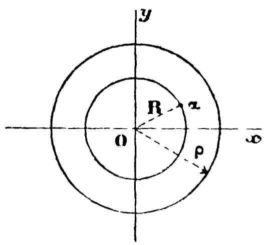
SUR UNE FORMULE D'APPROXIMATION POUR LES NOMBRES DE BERNOULLI, TRÈS GRANDS;

PAR M. J. MALAISE.

Soit

$$f(z)=\frac{A_0(h-1)!}{(\alpha-z)^h}+\frac{A_1(h-2)!}{(\alpha-z)^{h-1}}+\ldots+\frac{A_{h-1}}{\alpha-z}+\varphi(z)\quad (^1),$$

où $\varphi(z)$ demeure finie pour $z=\alpha$ et est développable dans un cercle de rayon $\rho>R$, en appelant R le rayon



du cercle de convergence de $f(z)$ (*voir* la figure). Soit

$$\varphi(z)=b_0+b_1z+\ldots+b_nz^n+\ldots.$$

Posons

$$f(z)=\sum_0^\infty a_n z^n.$$

Remarquons que dans $\frac{A_i}{(\alpha-z)^{h-i}}$ qui se développe

(1) *Voir* M. G. DARBOUX, *Journal de Liouville*, 1878.

comme suit :

$$A_i\left[\alpha^{i-h} - \frac{i-h}{1}\alpha^{i-h-1}z + \ldots \right.$$
$$\left. + (-1)^n \frac{(i-h)(i-h-1)\ldots(i-h-n+1)}{n!}\alpha^{i-h-n}z^n + \ldots\right]$$

on a, pour coefficient de z^n, ceci :

$$\frac{A_i}{\alpha^{h+n-i}}\,\frac{(h-i)(h+1-i)\ldots(h+n-1-i)}{n!}.$$

Donc, en identifiant les expressions $f(z)$, on a

$$a_n\alpha^n = \sum_{i=0}^{i=h-1}(h-1)!\frac{A_i}{\alpha^{h-i}}$$
$$\times\frac{(h-i)(h-i+1)\ldots(h-i+n-1)}{n!} + b_n\alpha^n,$$

ou, si l'on veut,

$$(1)\quad a_n\alpha^n = \frac{A_0}{\alpha^h}(n+1)(n+2)\ldots(n+h-1)$$
$$+ \frac{A_1}{\alpha^{h-1}}(n+1)\ldots(n+h-2) + \ldots + \frac{A_{h-1}}{\alpha} + b_n\alpha^n.$$

La série $\varphi(z)$ est convergente dans un cercle de rayon $\rho > R$, donc dans la couronne circulaire. Prenons K, tel que : $0 < K < \rho - R$. Alors, à cause du théorème de Cauchy-Hadamard [1], on a

$$\lim(\rho - K)^n b_n = 0 \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{\varepsilon_n}{(\rho - K)^n}$$

$\left(\varepsilon_n\right.$ tend vers zéro avec $\left.\frac{1}{n}\right)$.

---

[1] Ce théorème dit que, pour $\Sigma a_n z^n$, le rayon du cercle de convergence R est donné par R = la plus grande limite de $\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$.

On a donc

$$(2)\qquad a_n\alpha^n = \frac{A_0}{\alpha^h}(n+1)\ldots(n+h-1) + \frac{A_1}{\alpha^{h-1}}(n+1)\ldots(n+h-2) + \ldots\ldots + \frac{A_{h-1}}{\alpha} + \varepsilon_n\left(\frac{\alpha}{\rho-K}\right)^n.$$

On en déduit la partie principale

$$(3)\qquad a_n = \frac{A_0 n^{h+1}}{\alpha^{n+h}}(1+\varepsilon)$$

(ε tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$).

Soit la fonction

$$\operatorname{tang}(x+t) = f(t).$$

Nous supposerons d'abord x *réel* et *positif*. Cette fonction admet le pôle $t = \frac{\pi}{2} - x$ sur son cercle de convergence. Comme c'est un pôle du premier ordre, on trouve le résidu de la fonction en cherchant $\lim\limits_{h=0} h \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - h\right)$, ce qui donne 1 ; et alors

$$f(t) = \frac{1}{t - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + \varphi(t),$$

$\varphi(t)$ étant développable en série de puissances entières de t' :

$$\varphi(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_n t^n + \ldots,$$

convergente dans un cercle de rayon plus grand que le cercle de convergence de $f(t)$.

La $n^{\text{ième}}$ dérivée de $\operatorname{tang} x$ vaut le coefficient de t^n, multiplié par $n!$

Cherchons le coefficient a_n de t^n dans le développement

$$f(t) = \sum_0^n a_n t^n.$$

La formule (3) donne

$$\frac{d^n \operatorname{tang} x}{dx^n} = \frac{n!}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{n+1}}(1+\varepsilon),$$

où x est réel et positif.

Cette formule est valable, en général, si

$$\left|\frac{\pi}{2} - x\right| < \left|\frac{\pi}{2} - x\right|,$$

c'est-à-dire lorsque x est imaginaire à partie réelle positive.

Lorsque x est imaginaire à partie réelle négative, ou en particulier lorsque x est réel et négatif, on a

$$\frac{d^n \operatorname{tang} x}{dx^n} = \frac{n!(-1)^{n+1}}{\left(\frac{\pi}{2} + x\right)^{n+1}}(1+\varepsilon),$$

car, dans ce cas, le cercle de convergence passe par le pôle $\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Enfin, si

$$\left|\frac{\pi}{2} - x\right| = \left|\frac{\pi}{2} + x\right|,$$

c'est-à-dire lorsque x est une imaginaire pure, ou lorsque $x = 0$, on a deux pôles sur le cercle de convergence. Alors :

$$\frac{d^n \operatorname{tang} x}{dx^n} = n!\left[\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\left(\frac{\pi}{2}+x\right)^{n+1}}\right](1+\varepsilon) \quad (^1).$$

On sait que

$$\operatorname{tang} x = 2^2(2^2-1)\frac{B_2}{2!}x - 2^4(2^4-1)\frac{B_4}{4!}x^3 + \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1}2^{2n}(2^{2n}-1)\frac{B_{2n}}{(2n)!}x^{2n-1} + \ldots,$$

où B_2, B_4, ..., B_{2n}, ... représentent les nombres de Bernoulli.

En comparant notre formule avec ce résultat, nous trouvons

$$B_{2n} = 2\frac{(2n)!}{(2^{2n}-1)\pi^{2n}}(1+\varepsilon).$$

Mais on a, d'après la formule de Stirling,

$$(2n)! = (2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n} \qquad \text{(approximativement)}.$$

(¹) On sait que

$$\operatorname{tang} x = \frac{2^3}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(2p-1)^2}\right)x^2$$
$$+ \frac{2^5}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{1}{(2p-1)^4}\right)x^3 + \ldots.$$

Les coefficients de ce développement *ne sont pas* égaux à

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{d^n \operatorname{tang} x}{dx^n}\right)_0,$$

mais il est curieux qu'ils tendent à le devenir quand n grandit, car, pour n impair très grand

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{dn \operatorname{tang} x}{dx^n}\right)_0 = \frac{2^{n+2}}{\pi^{n+1}}(1+\varepsilon)$$

Il vient

$$B_{2n} = \frac{4(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{n}}{(2^{2n} - 1)\pi^{2n - \frac{1}{2}}}(1 + \varepsilon),$$

où ε tend vers zéro, avec $\frac{1}{n}$.

Telle est la formule d'approximation que nous voulions établir pour les grands nombres de Bernoulli.