

Sur les nombres qui sont sommes de deux carrés

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 14
(1914), p. 16-18

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__16_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1914, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[I 13 b α]

SUR LES NOMBRES QUI SONT SOMMES DE DEUX CARRÉS;

PAR UN ANONYME.

Cette Note est relative à un fait bien connu, mais la distinction établie ici entre deux cas n'a peut-être pas été remarquée.

1. Un nombre naturel A est triangulaire si l'équation

$$\frac{x(x+1)}{2} = A, \quad x^2 + x - 2A = 0,$$

a ses racines entières; a et a' étant ces racines, on a

$$a + a' = -1;$$

l'une étant a , l'autre est $-(a+1)$. Si a est la racine positive ou nulle, le nombre a est la *base* du nombre triangulaire

$$\frac{a(a+1)}{2},$$

bien que ce nombre puisse encore s'écrire

$$\frac{-(a+1)x - a}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{a'(a'+1)}{2},$$

on ne dit pas que le nombre négatif $-(a+1)$ est une base du nombre triangulaire considéré; de cette façon, on peut parler de la parité de la base d'un nombre triangulaire.

Ainsi, quand un nombre triangulaire se présente sous la forme $\frac{a(a+1)}{2}$, a étant négatif, il faut le mettre

sous la forme

$$\frac{-(a+1)x - a}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{a'(a'+1)}{2},$$

et sa base est le nombre positif ou nul $a' = -(a+1)$.

Nous considérons zéro comme un nombre triangulaire de base zéro.

2. Soit N un nombre impair qui est somme de deux carrés,

$$N = a^2 + b^2 = (2h+1)^2 + (2k)^2.$$

Comme on a simultanément

$$N = a^2 + b^2, \quad 2N = (a+b)^2 + (a-b)^2,$$

on peut écrire

$$2N = (2h+2k+1)^2 + (2h-2k+1)^2.$$

Si l'on pose

$$h+k=c, \quad h-k=d,$$

de sorte que c et d sont deux nombres de même parité, on obtient

$$\begin{aligned} 2N &= (2c+1)^2 + (2d+1)^2, \\ 2(N-1) &= (4c^2+4c) + (4d^2+4d), \\ N &= 4 \left[\frac{c(c+1)}{2} + \frac{d(d+1)}{2} \right] + 1. \end{aligned}$$

Ainsi, dans l'égalité

$$N = 4n+1,$$

qui a lieu *a priori*, n est de la forme

$$\frac{c(c+1)}{2} + \frac{d(d+1)}{2},$$

c et d étant de même parité. Mais d peut être négatif, et deux cas se présentent :

1° Dans l'égalité $N = a^2 + b^2$, celui des deux nombres a et b qui est impair est le plus grand ;

on a

$$2h + 1 > 2k, \quad 2h \geq 2k, \quad d \geq 0;$$

alors, dans la formule $N = 4n + 1$, le nombre n est la somme de deux nombres triangulaires dont les bases c et d sont de même parité; pour $h = k$, n est le nombre triangulaire de base $2k$ (l'autre nombre triangulaire étant 0).

2° Dans l'égalité $N = a^2 + b^2$, celui des deux nombres a et b qui est impair est le plus petit; on a

$$2h + 1 < 2k, \quad 2h + 2 \leq 2k, \quad d \leq -1;$$

en posant $d' = -(d + 1)$, n est de la forme

$$\frac{c(c+1)}{2} + \frac{d'(d'+1)}{2},$$

de sorte que n est alors la somme de deux nombres triangulaires dont les bases c et d' sont de parités différentes; pour $h = k - 1$, n est le nombre triangulaire de base $2k - 1$ (l'autre nombre triangulaire étant 0).

Exemples :

$$29 = 5^2 + 2^2 = 4 \times 7 + 1, \quad 7 = \frac{3 \times 4}{2} + \frac{1 \times 2}{2},$$

$$17 = 1^2 + 4^2 = 4 \times 4 + 1, \quad 4 = \frac{2 \times 3}{2} + \frac{1 \times 2}{2}.$$
