F. GOMES TEIXEIRA

Sur les courbes isoptiques et les podaires

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 161-166

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__161_1>

[O'2q]

SUR LES COURBES ISOPTIQUES ET LES PODAIRES;

PAR M. F. GOMES TEIXEIRA.

1. On désigne sous le nom de *courbe isoptique d'une autre courbe* (C_1) *et d'un point* O le lieu (C) décrit par le sommet d'un angle constant dont un des côtés est tangent à (C_1) et l'autre passe par le point donné O. Si l'angle est droit, la courbe (C) est dite *orthoptique* et elle est identique à la *podaire* de (C_1) par rapport à O.

Prenons pour origine des coordonnées orthogonales le point O et représentons la courbe (C_1) par les équations paramétriques

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

l'angle donné par α, et les coordonnées de son sommet par (X, Y). On a

$$(Y - y)x' = (X - x)y',$$

$$Y = \frac{y' \cos\alpha + x' \sin\alpha}{x' \cos\alpha - y' \sin\alpha} X.$$

Donc la courbe (C) peut être représentée par les équations paramétriques

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{yx' - xy'}{x'^2 + y'^2} \, \frac{x' \cos\alpha - y' \sin\alpha}{\sin\alpha}, \\ Y &= \frac{yx' - xy'}{x'^2 + y'^2} \, \frac{y' \cos\alpha + x' \sin\alpha}{\sin\alpha}. \end{aligned} \right.$$

Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, et si X_1, Y_1 désignent les valeurs qu'alors prennent X, Y, on a les équations de la courbe orthoptique de (C_1) et O, savoir :

$$X_1 = -\frac{(yx' - xy')y'}{x'^2 + y'^2}, \qquad Y_1 = \frac{(yx' - xy')x'}{x'^2 + y'^2}.$$

Donc on a

$$\begin{aligned} X \sin\alpha &= Y_1 \cos\alpha + X_1 \sin\alpha, \\ Y \sin\alpha &= Y_1 \sin\alpha - X_1 \cos\alpha, \end{aligned}$$

ou

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= Y_2 \cos\alpha + X_2 \sin\alpha, \\ Y &= Y_2 \sin\alpha - X_2 \cos\alpha, \end{aligned} \right.$$

où

$$(3) \qquad X_1 = X_2 \sin\alpha, \qquad Y_1 = Y_2 \sin\alpha.$$

Quand le point (X_1, Y_1) décrit la podaire de (C_1) par rapport à O, le point (X_2, Y_2) décrit une courbe semblable à celle-là. Le point (X, Y), déterminé par les équations (2), décrit la courbe isoptique de (C_1) et O. Mais, en désignant par (θ, ρ) et (θ_2, ρ_2) les coordonnées polaires des points (X, Y) et (X_2, Y_2), on a

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{Y}{X}, \qquad \operatorname{tang}\theta_2 = \frac{Y_2}{X_2},$$

et, par conséquent, en tenant compte des formules (2),

$$\operatorname{tang}(\theta - \theta_2) = \operatorname{tang}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right),$$

d'où il résulte

$$\theta - \theta_2 = \alpha - \frac{\pi}{2}.$$

Comme on a aussi $\rho = \rho_2$, nous avons le théorème suivant :

La courbe isoptique de C_1 *et* O *est semblable à la* *podaire de* (C_1) *par ravport a* O. *On détermine la nature de cette courbe, quand la podaire est connue, au moyen des équations* (3), *et l'on en obtient la position dans le plan de* (C_1) *en faisant tourner le lieu de* (X_2, Y_2) *autour du point* O *d'un angle égal à* $\frac{\pi}{2} - \alpha$ *dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre.*

2. Nous allons nous occuper maintenant de la question inverse de celle qui précède, c'est-à-dire du problème suivant :

Déterminer une courbe (C_1) *sur laquelle doit rouler un côté d'un angle donné* α, *dont l'autre côté passe par un point fixe* O, *pour que le sommet* M *décrive une ligne donnée* (C).

Prenons encore pour origine des coordonnées orthogonales le point O. L'équation d'une tangente à la courbe (C_1) est

$$x \cos\omega + y \sin\omega = p = f(\omega),$$

ω désignant l'angle que la normale correspondante fait avec l'axe des abscisses et $p = f(\omega)$ la distance de l'origine à la tangente considérée. La courbe (C_1) est l'enveloppe des positions que cette tangente prend quand ω varie, et elle peut donc être représentée par les équations paramétriques

$$x = f(\omega)\cos\omega - f'(\omega)\sin\omega,$$
$$y = f'(\omega)\cos\omega + f(\omega)\sin\omega.$$

Mais, en représentant par p_1 la distance de l'origine au sommet M de l'angle α et par θ l'angle de OM et de l'axe des abscisses, nous avons

$$p_1 = \frac{p}{\sin\alpha} = \frac{f(\omega)}{\sin\alpha}, \qquad \theta = \omega + \alpha - \frac{\pi}{2}.$$

Donc la courbe (C) peut être représentée par l'équation polaire

$$\rho = p_1 = \frac{f\left(\frac{\pi}{2} + \theta - \alpha\right)}{\sin\alpha}.$$

Si $\rho = F(\theta)$ est l'équation donnée de la courbe C, on a

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2} + \theta - \alpha\right)}{\sin\alpha} = F(\theta)$$

et, par suite,

$$f(\omega) = \sin\alpha\, F\left(\omega + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) = F(\theta)\sin\alpha.$$

Donc la courbe (C_1) peut être représentée par les équations paramétriques

$$(4)\qquad \begin{cases} x = \sin\alpha\,[F(\theta)\sin(\alpha-\theta) - F'(\theta)\cos(\alpha-\theta)], \\ y = \sin\alpha\,[F(\theta)\cos(\alpha-\theta) + F'(\theta)\sin(\alpha-\theta)], \end{cases}$$

ou

$$(5)\qquad \begin{cases} x = \sin\alpha \left\{ \begin{array}{l} [F(\theta)\cos\theta - F'(\theta)\sin\theta]\sin\alpha \\ - [F(\theta)\sin\theta + F'(\theta)\cos\theta]\cos\alpha \end{array} \right\}, \\ y = \sin\alpha \left\{ \begin{array}{l} [F'(\theta)\cos\theta + F(\theta)\sin\theta]\sin\alpha \\ + [F(\theta)\cos\theta - F'(\theta)\sin\theta]\cos\alpha \end{array} \right\}. \end{cases}$$

En désignant maintenant par X et Y les coordonnées de la podaire négative de (C) par rapport à O, nous avons, en faisant $\alpha = \frac{\pi}{2}$,

$$(6)\qquad \begin{cases} X = F(\theta)\cos\theta - F'(\theta)\sin\theta, \\ Y = F'(\theta)\cos\theta + F(\theta)\sin\theta. \end{cases}$$

Donc,

$$x = \sin\alpha\,[X\sin\alpha - Y\cos\alpha],$$
$$y = \sin\alpha\,[Y\sin\alpha + X\cos\alpha],$$

ou

(7) $$\left\{\begin{array}{l} x = X_1\sin\alpha - Y_1\cos\alpha, \\ y = Y_1\sin\alpha + X_1\cos\alpha, \end{array}\right.$$

où

(8) $$X_1 = X\sin\alpha, \qquad Y_1 = Y\sin\alpha.$$

Quand le point (X, Y) décrit la podaire négative de (C), le point (X_1, Y_1), déterminé par les équations (8), décrit une courbe semblable, et le point (x, y), déterminé par les équations (7), décrit la ligne dont (C) est la courbe isoptique.

Ces équations donnent, comme dans la question précédente, le théorème suivant :

Si (C) *est la podaire de* (C_1) *par rapport à* O *et* (C_2) *est une courbe isoptique de* (C) *et* O, *les courbes* (C_1) *et* (C_2) *sont semblables. Si l'on connaît* (C_1), *on détermine la nature de* (C_2) *au moyen des formules* (8) *et l'on en obtient la position dans le plan de* (C) *en faisant tourner le lieu de* (X_1, Y_1) *autour du point* O *d'un angle égal à* $\alpha - \frac{\pi}{2}$ *dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre.*

Appliquons cette doctrine au cas où la ligne (C) est une droite.

Nous pouvons prendre pour axe des abscisses la parallèle à la droite donnée passant par O, et alors l'équation de cette droite est

$$\rho = \frac{a}{\cos\theta}.$$

Les équations de sa podaire négative sont

$$x = a\frac{\cos 2\theta}{\cos^2\theta}, \qquad y = a\frac{\sin 2\theta}{\cos^2\theta}.$$

Il en résulte, en faisant

$$x = \rho_1 \cos\theta_1, \qquad y = \rho_1 \sin\theta_1,$$

l'équation polaire de la même courbe

$$\rho_1 = \frac{2a}{\cos\theta_1 + 1}$$

et ensuite son équation cartésienne

$$y^2 = 4a(a - x).$$

La podaire négative de la droite donnée est donc une parabole à laquelle cette droite est tangente au sommet, et le point O coïncide avec le foyer de cette parabole. Ce théorème est bien connu.

Il résulte maintenant, du théorème général énoncé ci-dessus, que l'équation de la courbe qui satisfait à la condition d'avoir pour ligne isoptique d'elle-même et du point O la droite donnée est

$$\rho_1 \sin\alpha = \frac{2a}{\sin(\alpha - \theta_1) + 1}.$$

Cette courbe est encore une parabole dont le foyer coïncide avec le point O.