

CHALDE

Sur une formule de sommation connue

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 14
(1914), p. 124-126

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__124_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1914, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[D2b]

SUR UNE FORMULE DE SOMMATION CONNUE;

PAR M. CHALDE.

La formule

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_1^{\infty} \frac{1}{m^2},$$

qui est un cas particulier de formules relatives aux quantités $\sum \frac{1}{m^{2k}}$ (JORDAN, *Cours d'Analyse*), s'établit d'habitude en comparant les développements de $\sin x$ en série et en produit infini, ou en développant la fon-

une autre, et par la nature même de la question, dans presque toutes les démonstrations de l'équation de fermeture données jusqu'ici par divers auteurs; dégagé par M. Stekloff de la manière la plus heureuse, ce lemme doit rendre, à notre avis, de grands services dans ce genre de questions.

(¹) *Math. Annalen*, 1903.

(²) Après la rédaction de cette Notice et pendant la correction des épreuves, j'ai appris qu'un théorème très général dans cet ordre d'idées a été établi tout récemment par M. Severini (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, t. XXXVI).

tion x^2 en série de Fourier. M. Camille Denquin (*Nouv. Ann.*, 1912, p. 127) a établi directement la formule équivalente

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

en partant de la formule de Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

On peut déduire la formule en question du rapprochement des formules

$$(1) \quad pu = \frac{1}{u^2} + \sum \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right]$$

$(w = 2m\omega + 2m'\omega')$,

$$(2) \quad \frac{1}{\sin^2 u} = \frac{1}{u^2} + \sum \frac{1}{(u - m\pi)^2}.$$

On a en général, avec des périodes identiques,

$$pu = \frac{1}{sn^2 u} - \frac{1+k^2}{3},$$

la fonction pu étant construite à partir de quantités e_1, e_2, e_3 qui satisfont aux relations

$$e_1 - e_3 = 1, \quad e_2 - e_3 = k^2,$$

en employant les notations habituelles ⁽¹⁾; pour $k = 0$, on a, en particulier,

$$pu = \frac{1}{\sin^2 u} - \frac{1}{3},$$

(¹) Dans l'opuscule de M. Ch. Henry, les indices 1 et 3 sont échangés; on n'a plus, eu égard à d'autres notations classiques, $\omega_1 = \omega$, $\omega_3 = \omega'$, mais le contraire. Ce changement est regrettable, dans un livre d'ailleurs excellent.

l'une des périodes étant $\frac{\pi}{2}$, l'autre étant $i\infty$; la formule (1) devient

$$(1') \quad \frac{1}{\sin^2 u} - \frac{1}{3} = \frac{1}{u^2} + \sum \left[\frac{1}{(u - m\pi)^2} - \frac{1}{m^2 \pi^2} \right].$$

La comparaison des formules (1') et (2) donne la formule cherchée, où le signe sommatoire s'applique de 1 à ∞ , et non plus de $-\infty$ à $+\infty$, zéro excepté.