NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

V. THÉBAULT

Sur le pont de Feuerbach

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 106-119

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__106_1>

[$K^1 2c$]

SUR LE POINT DE FEUERBACH;

PAR M. V. THÉBAULT,
Professeur à Ernée (Mayenne).

L'une des plus anciennes constructions du point φ de contact des cercles inscrit I et des neuf points ω d'un triangle est due au géomètre Hamilton. Elle est bien connue et deux démonstrations géométriques en ont été données dans ce journal par Gérono en 1865 et Canon (Mannheim) en 1903.

Entre ces deux démonstrations sont parues dans diverses Revues des propriétés fondamentales du point φ dont les deux plus importantes qui, à notre avis, constituent l'essentiel actuellement connu sur la question, sont les suivantes :

1° *Le point de Feuerbach est le centre de l'hyperbole équilatère qui passe par les sommets d'un triangle* ABC *et le centre* I *du cercle inscrit* (¹).

2° *Le point de Feuerbach est le foyer de la parabole qui admet le triangle* ABC *comme triangle conjugué et qui admet pour directrice la droite* OI *qui joint les centres des cercles circonscrit et inscrit. Cette parabole est d'ailleurs inscrite dans le triangle qui a pour sommets les milieux* A_1, B_1, C_1 *des côtés du triangle* ABC (²).

Nous nous proposons d'utiliser ces deux théorèmes pour donner de la construction d'Hamilton deux démonstrations élémentaires qui sont peut-être nouvelles et qui ont l'avantage d'être plus simples que celles rappelées ci-dessus. Ces démonstrations nous conduiront de plus à quelques propriétés qui n'ont peut-être pas été présentées aux lecteurs de cette Revue.

1. Rappelons ce théorème énoncé par M. Th. Lemoyne (*Nouvelles Annales*, 1904) :

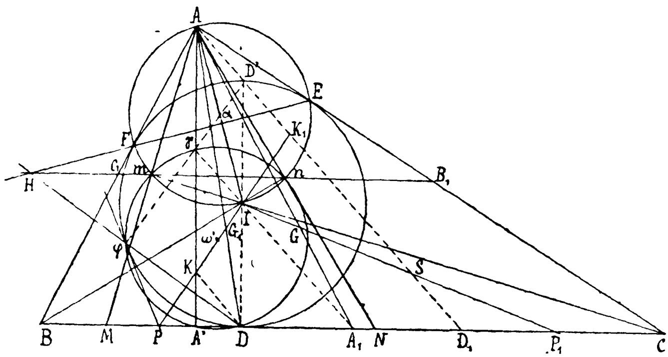
Si, étant donné un triangle ABC *inscrit à une conique* Σ, *on projette un point quelconque* P *de cette conique sur les côtés du triangle, en* Q, R, S, *le cercle* QRS *est orthogonal à un cercle fixe, réel ou imaginaire. Quand, en particulier, la conique* Σ *est une hyperbole équilatère, le cercle* QRS *passe par le centre de cette hyperbole.*

(¹) LEMOINE, *Association française pour l'Avancement des Sciences,* 1889, p. 203. — CH. MICHEL, *Journal de Mathématiques spéciales de G. de Longchamps*, janvier 1895.

(²) CH. MICHEL, *Journal de Mathématiques spéciales de G. de Longchamps,* janvier 1895. — BOUVAIST, *Nouvelles Annales,* 1906, p. 510. — V. THÉBAULT, *Nouvelles Annales*, 1910, p. 275.

Dans un triangle ABC (*fig.* 1), traçons les perpendiculaires AmM et AnN sur les bissectrices BI et CI, m, n, M, N étant les intersections de ces perpendicu-

Fig. 1.



laires avec BI, CI et BC. Soient A′, B′, C′ les pieds des hauteurs, D, E, F les contacts du cercle inscrit avec BC, CA, AB.

D'après le théorème de M. Lemoyne, *le cercle des neufs points* ω' *du triangle* AMN *passe au point* φ *de Feuerbach du triangle* ABC. Il contient aussi le point de contact D qui, visiblement, est milieu de MN.

Le cercle α circonscrit au triangle Amn, de diamètre AI, passe en E et F ; il est d'ailleurs égal à ω'. Ces deux cercles α et ω', passant en m et n, sont symétriques par rapport à B_1C_1 qui est leur axe radical.

Or EF étant l'axe radical des cercles I et α, le point H, commun à B_1C_1 et EF, a même puissance par rapport à I, ω' et α. C'est leur centre radical, et Dφ, corde commune à I et ω', passe par ce point H. D'où la construction d'Hamilton :

La droite, qui joint les points de contact avec (I) *des côtés* AB, AC *du triangle*, *et la droite qui joint les* *milieux de ces côtés se coupent en un point* H : *la droite* DH *rencontre le cercle* (I) *au point* φ *de Feuerbach.*

Remarques. — *a.* On peut obtenir directement que le cercle des neuf points du triangle AMN passe au point φ, sans se servir du théorème de M. Lemoyne.

On sait, en effet, que DE contient le milieu m de AM et que

$$\text{angle } \mathrm{D}\varphi\mathrm{A}' = \frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}.$$

Il suffit donc d'obtenir

$$\text{angle } \mathrm{D}m\mathrm{A}' = \frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}.$$

Or,

$$\widehat{\mathrm{D}m\mathrm{A}'} = \widehat{m\mathrm{A}'\mathrm{B}} - \widehat{m\mathrm{DB}} = 90^\circ - \frac{\mathrm{C}}{2} - \left(90^\circ - \frac{\mathrm{B}}{2}\right) = \frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}.$$

b. Le triangle AMN donne quelques propriétés intéressantes. L'orthocentre K de ce triangle est tel que $\mathrm{AK} = 2\,\mathrm{ID} = 2r$, r étant le rayon du cercle I (car I est aussi le centre du cercle circonscrit à AMN). *La droite d'Euler* IK *rencontre donc* BC *en un point* P *de l'axe radical du cercle inscrit et des neuf points du triangle* ABC.

La figure DIγK (γ milieu de AK), étant en effet un parallélogramme,

$$\frac{\mathrm{PD}}{\mathrm{PA}_1} = \frac{\mathrm{PK}}{\mathrm{PI}} = \frac{\mathrm{PA}'}{\mathrm{PD}}, \qquad \text{d'où} \qquad \overline{\mathrm{PD}}^2 = \mathrm{PA}_1 \times \mathrm{PA}';$$

$\mathrm{A}_1\mathrm{I}$ passant, comme l'on sait, en γ milieu de AK.

c. Soit G le point de concours des médianes du triangle ABC ; traçons $\mathrm{AD}'\mathrm{D}_1$, D′ étant l'extrémité du diamètre DI. On sait que $\mathrm{DA}_1 = \mathrm{A}_1\mathrm{D}_1$.

IG et IK rencontrant AD, respectivement en S et K_1, et comme A_1I est parallèle à AD_1,

$$\frac{IG}{GS} = \frac{1}{2} = \frac{IG_1}{G_1K}.$$

G_1 étant l'intersection de IK et de AD; SK est donc parallèle à GG_1, c'est-à-dire à BC, et

$$SD_1 = DK = AD' = D'K_1.$$

Comme I est le milieu de DD' :

La droite d'Euler IK *du triangle* AMN *est la transversale réciproque, dans le triangle* $DD'D_1$, *de la droite qui joint le centre de gravité* G *au centre* I *du cercle inscrit du triangle* ABC.

2. Nous avons donné en octobre 1911, dans le *Journal de Vuibert*, le théorème qui suit et qui complète celui énoncé au début de cette Note :

Les côtés du triangle qui a pour sommets les points de contact D, E, F, *du cercle inscrit et des côtés du triangle* ABC, *sont tangents à une parabole dont le foyer est le point* φ *de Feuerbach et la directrice*, OI.

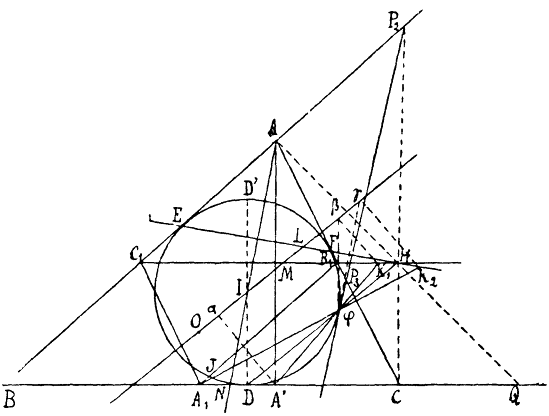
Considérons la droite φD ; *elle est bissectrice de l'angle* $A_1\varphi A'$. En effet, le cercle des neuf points de ABC étant tangent en φ au cercle inscrit I, φD coupe le premier au point homologue de D, c'est-à-dire au point de contact de la tangente parallèle à BC. Or, cette tangente touche le cercle d'Euler au milieu de l'arc A_1A'.

Nous allons alors établir les intéressantes propriétés ci-dessous :

a. Les droites qui joignent les pieds des hauteurs du triangle ABC *au point de Feuerbach rencontrent respectivement les côtés du triangle* $A_1B_1C_1$ *en leurs* *points de contact avec la parabole de foyer* φ *et de directrice* OI.

Traçons $\varphi\beta$ perpendiculaire sur B_1C_1 jusqu'à la rencontre avec la directrice OI, soit K_1 (*fig.* 2) inter-

Fig. 2.



section de B_1C_1 et $\varphi A'$. Il suffit de prouver que l'angle $O\beta K_1$ est droit, c'est-à-dire que $K_1\beta\varphi = K_1M\beta$, M étant l'intersection de OI et B_1C_1 ; car β étant symétrique de φ par rapport à B_1C_1, $K_1\beta = K_1\varphi$, de sorte que si $O\beta K_1$ est droit, K_1 appartient à la parabole de foyer φ et de directrice OI.

Or, nous savons que

$$\text{angle } K_1\beta\varphi = K_1\varphi\beta = \varphi A'A = AA'\alpha = MPA' = K_1M\beta,$$

$A'\alpha$ étant perpendiculaire à OI.

Voir notre article, *Sur quelques théorèmes de géométrie élémentaire* (*Nouvelles Annales*, 1910, p. 271), où nous avons établi la symétrie de $A'\varphi$ et $A'\alpha$ par rapport à AA'. K^1 est donc le point de contact de B_1C_1 et de la parabole précédente.

b. Les droites qui joignent le point de Feuerbach aux milieux des côtés du triangle ABC *rencontrent respectivement les côtés du triangle* DEF *aux points de contact avec la parabole précédente de foyer* φ *et de directrice* OI.

Soit J intersection de AI et φA_1 ; traçons $\varphi\gamma$ perpendiculaire sur EF et joignons γ au point K_2 de rencontre de EF et φA_1 ; γ est symétrique de φ par rapport à EF, donc $K_2\gamma = K_2\varphi$. Il suffit, par suite, de montrer que l'angle $O\gamma K_2$ est droit, soit que

$$\text{angle } \varphi\gamma K_2 = \gamma\varphi K_2 = AJK_2.$$

Or $\varphi DA' = PIN$. De plus, φD étant bissectrice de $A_1\varphi A'$, $A_1\varphi$ coupe le cercle I en D_1 symétrique de D par rapport à AI, car

$$\text{angle } DIN = AID_1 = \frac{C - B}{2} = A_1\varphi D.$$

On a donc, dans la circonférence I,

$$\text{mes.} AJK_2 = \text{mes.} \varphi DD';$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{angle } AJK_2 = D'D\varphi &= 90^\circ - \varphi DA' \\ &= 90^\circ - PIN = 90^\circ - AIL = ELI = \gamma LK_2, \end{aligned}$$

L étant l'intersection de OI et EF.

Alors, C_1B_1 et EF étant tangentes à la parabole de foyer φ et de directrice OI, d'après un théorème classique, φH qui joint le foyer à l'intersection des tangentes est bissectrice de l'angle $K_1\varphi K_2$, ou de son opposé par le sommet $A_1\varphi A'$; φH est donc le prolongement de $D\varphi$ et la construction d'Hamilton est à nouveau établie.

Remarques. — La propriété (a) se généralise pour une parabole quelconque tangente aux côtés d'un triangle.

Les points de contact des côtés d'un triangle tangent à une parabole sont situés sur les droites qui joignent respectivement le foyer aux pieds des hauteurs du triangle obtenu en menant, par les sommets, les parallèles aux côtés du premier.

La proposition a ne dépend en effet que de la symétrie de $\varphi A'$ et $A'\alpha$ par rapport à la hauteur AA'. Or, nous avons prouvé (*Nouvelles Annales*, 1910, p. 274) que cette propriété est générale.

La propriété b n'est d'ailleurs pas différente de a, car on montre, sans difficulté, que le pied de la hauteur du triangle $D_1E_1F_1$, obtenu en menant les parallèles aux côtés du triangle DEF par ses sommets, n'est autre que l'intersection de φA_1 avec le cercle I.

3. Soit P_2P_3 la portion de l'axe radical du cercle inscrit et des neuf points comprise entre BA et AC. Dans le quadrilatère circonscrit au cercle I, BCP_2P_3, le point de concours des diagonales BP_3 et CP_2 est le point H commun aux droites EF et φD des points de contact, c'est-à-dire le point d'Hamilton.

En utilisant le théorème que M. Van Aubel a donné dans *Mathesis*, sous le n° 128, on obtient :

$$\frac{P_2A}{P_2B} + \frac{AP_3}{P_3C} = \frac{AH}{HQ} = 1,$$

Q étant le point où AH rencontre BC (*fig.* 2).

P_2P_3 est donc la transversale réciproque d'une droite Δ qui contient le point de concours G des médianes du triangle ABC.

Nous montrerons tout à l'heure que Δ est la droite IG qui joint le centre I du cercle inscrit au centre de gravité G du triangle. D'où cette propriété :

Les droites qui joignent deux sommets B *et* C, *par exemple, au point* H *correspondant d'Hamilton, coupent* A_1C_1 *et* B_1A_1 *sur la droite* IG *qui joint le centre de gravité au centre du cercle inscrit du triangle* ABC.

4. Il résulte de la remarque *b* du premier paragraphe que le point φ de Feuerbach est le symétrique du contact D par rapport à la droite d'Euler IK du triangle AMN (*fig.* 1).

Mannheim, qui fit cette remarque après sa démonstration de la construction d'Hamilton (*Nouvelles Annales*, 1903), en déduisit la construction suivante de φ (*Bulletin des Sciences mathématiques et physiques élémentaires*, décembre 1912, question 1200) :

La droite qui joint le point D′ *diamétralement opposé au contact* D, *sur le cercle inscrit*, *au milieu de* AI, *coupe le cercle inscrit au point où celui-ci est touché par le cercle des neuf points du triangle* ABC.

$D'\varphi$ qui est en effet perpendiculaire sur $D\varphi$ est parallèle à IK (*fig.* 1) et rencontre par suite KA en γ tel que

$$K\gamma = ID' = A\gamma,$$

γ étant milieu de AK. $D'\varphi$ est alors diagonale du parallélogramme $A\gamma ID'$ et passe au milieu α de AI.

Joignons φ aux milieux A_1, B_1, C_1 des côtés du triangle ABC (*fig.* 3). Les longueurs φA_1, φB_1, φC_1 sont respectivement en fonction des côtés et des rayons des cercles inscrit et circonscrit :

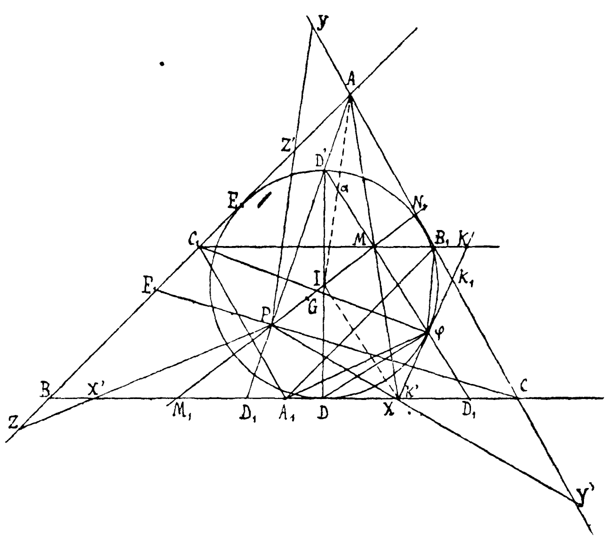
$$\varphi A_1 = \frac{b-c}{2}\sqrt{1-\frac{2r}{R}},$$

$$\varphi B_1 = \frac{a-c}{2}\sqrt{1-\frac{2r}{R}},$$

$$\varphi C_1 = \frac{a-b}{2}\sqrt{1-\frac{2r}{R}}.$$

$D'\alpha$ est bissectrice intérieure de l'angle $B_1\varphi C_1$, et le

Fig. 3.



point d'intersection M avec B_1C_1 est tel que

$$(1) \qquad \frac{B_1M}{MC_1} = \frac{\varphi B_1}{\varphi C_1} = \frac{AP}{QA} = \frac{a-c}{a-b}.$$

De même la droite analogue $\varphi F'$ rencontre C_1A_1 en N, et

$$(2) \qquad \frac{A_1N}{NC_1} = \frac{\varphi A_1}{\varphi C_1} = \frac{c-b}{a-b};$$

d'où l'on tire, en additionnant (1) et (2),

$$\frac{B_1M}{MC_1}+\frac{A_1N}{NC_1}=1,$$

ce qui, d'après une propriété connue, nous indique que MN contient G, point de concours des médianes de $A_1B_1C_1$, c'est-à-dire de ABC.

Les triangles $A_1B_1C_1$ et ABC étant semblables, le centre de similitude étant G,

$$\frac{B_1M}{MC_1}=\frac{BM_1}{M_1C}=\frac{a-c}{a-b} \quad \text{et} \quad \frac{A_1N}{NC_1}=\frac{AN_1}{N_1C}=\frac{c-b}{a-b}.$$

Les points M_1, N_1 sont donc les intersections de la droite IG, qui joint le centre du cercle inscrit au point de concours des médianes, avec les côtés AC et CB. D'où cette intéressante propriété des droites de Mannheim, $D'\alpha$, $E'\gamma$, $F'\beta$, que nous croyons nouvelle :

Les droites de Mannheim rencontrent les côtés du triangle formé en joignant les milieux A_1, B_1, C_1, *des côtés du triangle* ABC, *en trois points qui sont situés sur la droite* IG *joignant le centre du cercle inscrit au point de concours des médianes.*

Joignons AMK', M étant milieu de AK' ; IK' est parallèle à $D'\alpha$, par suite perpendiculaire sur $D\varphi_1$ en son milieu. $K'\varphi_1$ est donc tangente en φ_1 au cercle I et n'est autre que l'axe radical du cercle inscrit et des neuf points de ABC.

Mais $BM_1=2B_1M=CK'$ et K' est le symétrique de M_1 par rapport au milieu A_1 de BC. La même propriété subsiste évidemment pour les points analogues à K' par rapport aux côtés AC et BA. Par suite :

La transversale réciproque de la droite qui joint le centre de gravité d'un triangle au centre de son *cercle inscrit est la tangente au point de Feuerbach.*

Cette belle propriété a été publiée dans le *Journal de Vuibert*, 36^e année (p. 132).

Remarques. — *a*. Ce dernier théorème est d'ailleurs également donné par la remarque *c* du paragraphe **1**, en observant que $PA_1 = A_1P_1$ (*fig.* 1).

b. Soient H et H_1 les points d'Hamilton situés sur C_1B_1 et A_1C_1 (*fig.* 3). On trouve sans difficulté

$$\frac{HB_1}{HC_1} + \frac{H_1A_1}{H_1C_1} = \frac{\varphi B_1}{\varphi C_1} + \frac{\varphi A_1}{\varphi C_1} = 1.$$

Si l'on porte sur C_1B_1 et A_1C_1, $HB_2 = HB_1$ et $H_1A_2 = H_1A_1$, on a, par exemple, cette propriété :

La droite HH_1 *qui joint deux points d'Hamilton du triangle* ABC *contient le point de concours des médianes du triangle* $A_2C_1B_2$.

5. La propriété relative à la tangente au cercle inscrit au point φ de Feuerbach n'est qu'un cas particulier du théorème général :

Quand une droite tourne autour d'un point quelconque P, *sa transversale réciproque par rapport à un triangle* ABC *enveloppe une conique inscrite au triangle et qui touche l'un quelconque de ses côtés*, BC *par exemple*, *au point* P'_1 *isotomique du point* P_1 *où la droite* AP *qui joint* P *au sommet opposé rencontre ce côté.*

1° Cette conique devient le cercle inscrit I au triangle quand P'_1, P'_2, P'_3 sont les contacts D, E, F, avec les côtés. Le point P n'est autre que le *point de Nagel* du triangle ABC. Ce point est donc tel que *la transversale réciproque de toute droite* Δ *qui le contient*, *par rapport au triangle* ABC, *enveloppe le cercle inscrit* I.

En remarquant que le centre I n'est autre que le point de Nagel du triangle $A_1B_1C_1$, on obtient cette propriété :

La transversale réciproque, par rapport au triangle $A_1B_1C_1$ *de toute droite* Δ *passant au centre du cercle inscrit du triangle* ABC, *enveloppe un cercle fixe, inscrit à* $A_1B_1C_1$, *dont le centre est milieu de* IP, P *étant le point de Nagel du triangle* ABC (*fig.* 3).

On sait que le point de Nagel est le point de concours des droites Y′X, X′Z, Z′Y, telles que

$$\overline{AZ'} = c - b, \qquad \overline{BX'} = a - c, \qquad \overline{cY'} = b - a.$$

Il est évident, en effet, que les transversales réciproques de ces droites par rapport au triangle sont tangentes au cercle I, les triangles ABC et X_1CY_1 par exemple, étant égaux.

2° Rappelons le point K du cercle des neuf points relatif à un diamètre quelconque Δ du cercle circonscrit à un triangle ABC, dont nous avons donné ici-même (juin 1910, p. 271) quelques propriétés.

M. Neuberg, le savant professeur de l'Université de Liège, appelle d'ailleurs ce point K *orthopôle de* Δ et Δ *orthopolaire de* K.

Le théorème précédent nous permet alors d'énoncer que :

L'enveloppe de la transversale réciproque Δ' *par rapport à un triangle* ABC, *d'un diamètre mobile* Δ *du cercle circonscrit à ce triangle est la conique qui a pour foyers l'orthocentre* H *et le centre* O *du cercle* *circonscrit et qui est inscrite au triangle* ABC. *D'ailleurs* Δ' *passe par l'orthopôle* K *de* Δ.

En particulier :

La transversale réciproque Δ' *de la ligne* OI *des centres des cercles circonscrit et inscrit au triangle, touche cette conique.* Δ' *passe, de plus, par le point* φ *de Feuerbach.*

3° Enfin, il est bien connu que :

Lorsqu'une droite Δ *tourne autour du centre de gravité* G *d'un triangle, sa transversale réciproque enveloppe la conique tangente aux trois côtés du triangle en leurs milieux.*