DE SPARRE

Note au sujet du frottement

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 81-94

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__81_1>

[R9a]

NOTE AU SUJET DU FROTTEMENT;

PAR M. LE COMTE DE SPARRE.

Le théorème classique pour l'équilibre avec frottement d'un solide reposant par plusieurs points de contact donne, pour cet équilibre, une condition qui, ainsi que je vais le faire voir, est sujette à exceptions.

Je prends l'énoncé de ce théorème dans le Traité de M. Appell [1].

Imaginons un solide S *reposant sur plusieurs solides* $S_1, S_2, \ldots, S_p$ *par des points* $A_1, A_2, \ldots, A_p$,

[1] T. I. 3e édition, 1909, p. 300.

les coefficients de frottement sur $S_1, S_2, \ldots, S_p$ *étant* $f_1, f_2, \ldots, f_p$ *et les angles de frottement* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$; *le solide* S *étant sollicité par des forces données* $F_1, F_2, \ldots, F_n$, *cherchons les conditions d'équilibre. La réaction de* S_ν *sur* S *est une force* R_ν *appliquée au point* A_ν *et faisant avec la normale* N_ν *un angle moindre que l'angle de frottement* φ_ν, *c'est-à-dire située dans le cône* C_ν, *de sommet* A_ν, *d'axe* N_ν *et d'angle* φ_ν. *Pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que le système des forces données* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *soit tenu en équilibre par un système de réactions* $R_1, R_2, \ldots, R_p$ *satisfaisant aux conditions précédentes, c'est-à-dire que le système des forces données soit équivalent à un système de forces* $-R_1$, $-R_2, \ldots, -R_p$ *passant respectivement par les points* $A_1, A_2, \ldots, A_p$ *et situées dans les cônes* $C_1, C_2, \ldots, C_p$. *Ces dernières forces seront toutes détruites par les réactions des surfaces* $S_1, S_2, \ldots, S_p$.

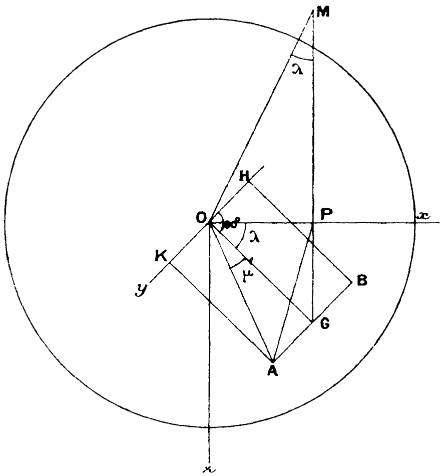
Or, ce théorème peut être en défaut, la condition donnée *comme nécessaire et suffisante pour l'équilibre* est nécessaire, *mais elle n'est pas toujours suffisante*.

Pour mettre bien le fait en évidence, nous commencerons par donner un exemple où la condition donnée comme nécessaire et suffisante est satisfaite et où le système se met en mouvement.

Supposons une aiguille matérielle pesante AB placée horizontalement à l'intérieur d'une sphère sur laquelle ses extrémités A et B frottent. Le coefficient de frottement des extrémités de l'aiguille sur la sphère étant le même en A et B et égal à

$$f = \operatorname{tang} \varphi.$$

Soit xOz le plan vertical passant par le milieu de l'aiguille, Ox étant horizontal et Oz vertical et dirigé vers le bas, Oy étant la perpendiculaire au plan xOz, λ l'angle de OG avec Ox, qui est aussi l'angle du



plan AOB passant par l'aiguille et le centre de la sphère avec le plan horizontal xOy.

Nous supposerons que l'aiguille est abandonnée sans vitesse initiale, ou que son mouvement initial est une rotation autour de Oy, tendant à augmenter λ. Comme en vertu de ces hypothèses, tout est symétrique par rapport au plan xOz, l'aiguille se déplacera en restant parallèle à Oy, son mouvement se réduisant à une rotation autour de cette droite. Les extrémités de l'aiguille se déplacent donc sur les petits cercles parallèles au plan xOz passant par les points A et B; par suite, si K et H sont les centres de ces cercles, les forces de frottement Q en A et B, qui sont égales par raison de symétrie, sont perpendiculaires aux droites KA et HB, et elles font avec l'horizon l'angle $\frac{\pi}{2} - \lambda$.

Désignons par R le rayon de la sphère, par r le rayon des petits cercles décrits par A et B, de sorte que, $2a$ étant la longueur de l'aiguille, on a

$$r = \mathrm{KA} = \mathrm{HB} = \mathrm{OG} \qquad \text{et} \qquad a^2 = \mathrm{R}^2 - r^2.$$

Posons de plus

$$\widehat{\mathrm{AOG}} = \mu.$$

Les équations du mouvement du centre de gravité de l'aiguille donnent alors, M désignant la masse et N la valeur commune des composantes normales des réactions en A et B,

$$\begin{aligned} \mathrm{M}\,r\frac{d^2\lambda}{dt^2} &= \mathrm{M}\,g\cos\lambda - 2\mathrm{Q}, \\ 2\mathrm{N}\cos\mu &= \mathrm{M}\,r\frac{d\lambda^2}{dt^2} + \mathrm{M}\,g\sin\lambda. \end{aligned}$$

Mais, si le mouvement a lieu, on a

$$\mathrm{Q} = \mathrm{N}f,$$

de sorte qu'on déduit des deux équations précédentes

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} = \frac{g}{r}\cos\lambda - \frac{f}{\cos\mu}\left(\frac{d\lambda^2}{dt^2} + \frac{g}{r}\sin\lambda\right)$$

ou

$$(1) \qquad \frac{d^2\lambda}{dt^2} = \frac{g\sin\lambda}{r\cos\mu}(\cot\lambda\cos\mu - f) - \frac{f}{\cos\mu}\,\frac{d\lambda^2}{dt^2}.$$

Cette équation fait voir que si, à l'instant initial,

$$\frac{d\lambda}{dt} = 0,$$

le mouvement se produira dans les conditions supposées, pourvu du moins que, à l'instant initial,

$$(2) \qquad f < \cot\lambda\cos\mu.$$

L'équilibre est donc impossible si l'inégalité (2) est satisfaite [1].

Nous allons maintenant montrer que cette inégalité (2) étant satisfaite *et par suite l'équilibre impossible*, la condition indiquée dans le théorème classique comme nécessaire et suffisante pour l'équilibre, peut l'être également, et que, par suite, cette condition n'est pas suffisante.

La seule force extérieure qui agit sur l'aiguille est son poids appliqué en G. Soit P la projection de G sur l'horizontale Ox, nous pouvons supposer le poids de l'aiguille transporté en un point quelconque E de sa direction et décomposer ce poids en deux forces dirigées suivant EA et EB. L'angle de EA avec la composante normale de la réaction, dirigée suivant le rayon AO, sera minimum si AE est dirigé suivant la projection PA de AO sur le plan vertical PAG, c'est-à-dire si E coïncide avec P. Donc, d'après le théorème classique, la condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre serait que l'angle de frottement fût supérieur ou au moins égal à OAP. Désignons cet angle par φ'. Nous aurons

$$\tang^2\varphi' = \frac{\overline{OP}^2}{\overline{AP}^2}.$$

---

(1) On peut d'ailleurs obtenir sans peine une intégrale première de l'équation (1) et l'on trouve

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} = \frac{2g[3f\cos\mu\cos\lambda + (\cos^2\mu - 2f^2)\sin\lambda]}{r(4f^2+\cos^2\mu)} + \left\{\omega^2 - \frac{2g[3f\cos\mu\cos\lambda_0+(\cos^2\mu-2f^2)\sin\lambda_0]}{r(4f^2+\cos^2\mu)}\right\} e^{\frac{2f(\lambda_0-\lambda)}{\cos\mu}},$$

où λ_0 est la valeur initiale de λ, et ω celle de $\dfrac{d\lambda}{dt}$.

Mais

$$OP = R\cos\mu\cos\lambda.$$

$$\overline{AP}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{GP}^2 = R^2\sin^2\mu + R^2\cos^2\mu\sin^2\lambda;$$

d'où

$$\operatorname{tang}^2\varphi' = \frac{\cos^2\mu\cos^2\lambda}{\sin^2\lambda\cos^2\mu + \sin^2\mu} = \frac{\cos^2\mu\cot^2\lambda}{1 + \sin^2\mu\cot^2\lambda};$$

donc

$$\operatorname{tang}\varphi' < \cot\lambda\cos\mu.$$

Par suite, si

(3) $$\operatorname{tang}\varphi' < f < \cot\lambda\cos\mu,$$

l'aiguille se mettra en mouvement, bien que la condition donnée dans le théorème classique comme nécessaire et suffisante pour l'équilibre soit satisfaite.

Voici maintenant la raison pour laquelle la condition donnée par le théorème n'est pas toujours suffisante.

Lorsqu'il s'agit d'un point ou d'un corps reposant par un point unique, la condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre est bien que les forces auxquelles le corps est soumis se réduisent à une force passant par le point de contact et située à l'intérieur ou sur la surface du cône de résolution ayant ce point pour sommet, la normale pour axe et l'angle de frottement pour demi-angle d'ouverture; mais si le corps repose par un second point, les choses ne se passent plus de même. En effet, si l'on considère isolément l'un des points de contact, la résultante totale des forces qui passent par ce point doit être située à l'intérieur ou sur la surface du cône dont on vient de parler puisqu'elle est égale et directement opposée à la réaction de la surface; toutefois, cette résultante est la résultante non seulement des forces extérieures, mais aussi des forces intérieures de liaison passant par le point, et la réaction n'est égale et directement opposée à la résultante des forces extérieures passant par le point que si celle des forces intérieures est nulle, ce qui n'aura pas généralement lieu.

On peut, à ce sujet, faire appel à une expérience journalière; chacun sait qu'une ferme, si elle n'a pas de tirant, ne peut se maintenir en équilibre que par le frottement de ses extrémités sur leurs points d'appui, mais s'il y a un tirant à sa base, le frottement disparaît et les murs qui supportent la ferme ne subissent de sa part aucune tendance au renversement.

Revenons au cas de l'aiguille reposant horizontalement à l'intérieur d'une sphère; on peut, sans aucun doute, remplacer, en vertu des liaisons du système, le poids $2p$ de l'aiguille, appliqué en G par deux forces F égales dirigées suivant PA et PB, mais cette substitution donne naissance à deux forces de liaison égales et contraires dirigées suivant AG et BG, de sorte que la résultante totale des forces agissant en A n'est pas dirigée suivant AP (1). On peut évidemment dire que la force F, si elle agissait seule, serait détruite par la réaction de la surface, du moment que l'angle OAP est au plus égal à l'angle de frottement, mais la réaction de la surface détruirait la force F, si le point A était libre, parce que ce point tendrait à se déplacer suivant le grand cercle intersection de la sphère par le plan OAP et que ce fait donnerait naissance à une force de frottement dirigée suivant la tangente à ce grand cercle; mais la rigidité absolue supposée aux liaisons empêche, du moment que les deux forces dirigées suivant PA et PB sont égales, cette tendance au déplacement de se

(1) C'est ce qui se passe dans le cas de la ferme munie d'un tirant.

produire dans le sens indiqué et par suite le frottement correspondant de prendre naissance ([1]).

En nous bornant toujours au cas de l'aiguille placée horizontalement dans une sphère, on peut trouver la condition d'équilibre de la façon suivante :

Supposons l'aiguille en équilibre ; quelles que soient les forces de frottement qui s'exercent en A et B, on peut les décomposer chacune en deux composantes dans les plans tangents à la sphère en ces points, une dans le plan AOB passant par l'aiguille et le centre de la sphère, et l'autre perpendiculaire à ce plan. Soit OM la perpendiculaire au plan AOB menée par O ; s'il y a équilibre, la somme des moments de toutes les forces qui sollicitent l'aiguille par rapport à cette droite sera nulle. Or, les moments du poids de l'aiguille, dirigé suivant la verticale du point G, des composantes normales des réactions en A et B dirigées suivant AO et BO et des composantes du frottement suivant les perpendiculaires en A et B au plan AOB, qui sont parallèles à OM, sont nuls. Quant aux composantes du frottement, situées dans le plan AOB, si celle en A est dirigée en avant du plan MOA et a, par suite, un moment positif, c'est que le point A tend à se déplacer en arrière de ce plan. Il en résulte, en vertu de l'invariabilité de la longueur de l'aiguille, que le point B tend à se déplacer en arrière du plan BOM ; la force de frottement en B sera donc dirigée en avant de ce plan et elle aura, par suite, un moment positif. Les moments des composantes des forces de frottement en A et B dans le plan AOB étant tous deux positifs, leur somme ne peut être nulle. On arriverait à une conclusion toute semblable si le point A tendait à prendre

([1]) Tout comme dans le cas de la ferme munie d'un tirant.

un mouvement en avant du plan AOM; les deux moments seraient alors tous deux négatifs. Donc, la somme des moments des forces de frottement par rapport à OM ne peut, par suite de l'invariabilité de la longueur de l'aiguille, être nulle que si les composantes des forces de frottement dans le plan AOB en A et B sont elles-mêmes nulles, et, par suite, les forces de frottement en ces points normales au plan AOB.

Les réactions de la sphère en A et B sont donc situées dans les plans AOM, BOM. Comme d'ailleurs ces deux forces doivent faire équilibre au poids de l'aiguille, si M est le point de rencontre de la verticale du point G avec OM, les réactions en A et B seront dirigées suivant AM et BM.

Donc, s'il y a équilibre, on devra avoir

$$MAO = MBO \leqq \varphi.$$

Si d'ailleurs on pose $MAO = \varphi_1$, nous aurons

$$\tan\varphi_1 = \frac{OM}{R}.$$

Mais

$$OM = r \cot\lambda = R\cos\mu \cot\lambda.$$

Pour l'équilibre, la condition nécessaire est donc

$$\tan\varphi_1 = \cos\mu \cot\lambda \leqq \tan\varphi$$

ou

$$f \geqq \cos\mu \cot\lambda.$$

Réciproquement, si cette condition est satisfaite, l'équilibre a lieu. En effet, on peut alors remplacer la pesanteur par deux forces égales à F, dirigées suivant MA et MB qui, si nous désignons l'angle MAO par φ_1, donneront chacune une composante $F\cos\varphi_1$ suivant AO et BO et une composante $F\sin\varphi_1$ suivant les perpendiculaires au plan AOB passant par A et B. Les points A et B tendront donc à se déplacer suivant ces perpendiculaires et, comme ces deux déplacements sont compatibles avec la liaison résultant de l'invariabilité de la longueur de l'aiguille, la force de liaison qui assure cette invariabilité n'entrera pas en jeu.

Les forces F sont donc les forces totales auxquelles les points A et B, considérés comme libres, sont soumis, et comme ces forces font avec les normales AO et BO à la sphère des angles φ_1, par hypothèse inférieurs ou au plus égaux à φ, ils seront en équilibre. Nous retrouvons la condition déduite de l'étude du mouvement; mais ce qui précède met en évidence que, *si l'on suppose la rigidité absolue des liaisons*, il faut, pour que le théorème classique soit exact, y ajouter la condition que le système de forces soit tel qu'il tende à imprimer aux différents points de contact, considérés comme libres, un système de déplacements compatibles avec les liaisons, car alors les forces de liaisons n'entrent pas en jeu.

On peut dire, il est vrai, que ce qui précède suppose la rigidité absolue des liaisons et que, pour les corps naturels, les choses se passent d'une façon un peu différente ; mais alors les choses dépendent de la façon dont les liaisons sont réalisées, et il faut un examen particulier pour chaque cas.

Je vais, à ce point de vue, reprendre sommairement la question en me bornant toujours au cas de l'aiguille placée horizontalement à l'intérieur d'une sphère.

Si l'aiguille est placée en un point où elle puisse rester en équilibre, cette aiguille se courbera très légèrement sous l'influence de son poids et des réactions de la sphère, les points A et B glisseront eux-mêmes très peu ([1]) sur la sphère jusqu'à ce qu'ils s'arrêtent sous

([1]) Si le coefficient de frottement était assez considérable, il l'influence du poids, de la compression de l'aiguille et du frottement, et, à ce moment, quelle que soit la valeur de λ, la réaction de la sphère fera avec la normale un angle égal à l'angle de frottement, puisque le mouvement des points A et B vient de s'arrêter.

Conservons les notations précédentes; désignons, de plus, par $2p$ le poids de l'aiguille, par ε l'angle que fait la force de frottement avec la normale au plan AOB passant par A et dirigée au-dessus de ce plan, angle compté positivement du côté opposé à AG.

Soient, de plus, N la réaction de la sphère en A, T la force de liaison due à l'aiguille, qui agit au même point, force comptée positivement dans le sens GA, et remplaçons le poids de l'aiguille par deux forces égales à p agissant en A et B.

Écrivons alors les équations d'équilibre du point A [1] suivant les trois directions rectangulaires; AO la perpendiculaire à cette droite dans le plan AOB, du côté du point G et la perpendiculaire au plan AOB au-dessus de ce plan.

Nous aurons

$$N - p\sin\lambda\cos\mu - T\sin\mu = 0,$$
$$p\sin\lambda\sin\mu - T\cos\mu - Nf\sin\varepsilon = 0,$$
$$Nf\cos\varepsilon - p\cos\lambda = 0.$$

On tire des deux dernières équations

$$(4)\qquad Nf = \frac{p\cos\lambda}{\cos\varepsilon},$$

$$(5)\qquad T = p\sin\lambda\tang\mu - \frac{p\cos\lambda}{\cos\mu}\tang\varepsilon.$$

---

pourrait y avoir non pas glissement, mais seulement tendance au glissement; nous laissons ce cas de côté, pour le moment.

[1] Qui s'appliqueront aussi pour le point B puisque, par hypothèse, tout est symétrique par rapport au plan xOz.

et, portant ces valeurs dans la première, on aura

$$(6)\qquad \operatorname{tang}\lambda\cos\varepsilon - \sin\mu\sin\varepsilon - \frac{\cos\mu}{f} = 0.$$

Si nous posons alors

$$(7)\qquad u = \operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{2},$$

nous aurons, pour déterminer u, l'équation

$$(8)\quad \left(\operatorname{tang}\lambda - \frac{\cos\mu}{f}\right)u^2 + 2\sin\mu\, u - \operatorname{tang}\lambda + \frac{\cos\mu}{f} = 0.$$

Mais, dans l'hypothèse où nous nous sommes placés, et où l'aiguille a été posée horizontalement à l'intérieur de la sphère, la valeur de ε, pour être acceptable, doit être positive, car, l'aiguille se courbant légèrement sous l'influence de son poids et de la réaction de la sphère, les points A et B ont dû se rapprocher du plan xOz; or, pour que ε, et par suite u, soit positif, il faut

$$\operatorname{tang}\lambda > \frac{\cos\mu}{f}$$

ou

$$f > \cos\mu\cot\lambda.$$

Nous retrouvons donc la condition déjà obtenue.

Toutefois, supposons maintenant que l'aiguille, au lieu d'être simplement posée horizontalement à l'intérieur de la sphère, subisse en même temps, en étant maintenue horizontale et immobile, une compression verticale en son milieu, qui lui imprime une flexion légère, mais cependant suffisante pour que les points A et B tendent à s'éloigner, et qu'on l'abandonne ensuite à elle-même.

Les points A et B, au lieu de tendre à se rapprocher sous l'influence du poids de l'aiguille et de la réaction de la sphère, tendront, au lieu de cela, per hypothèse, à s'éloigner, par suite de la réaction élastique de l'aiguille, et, lorsqu'ils s'arrêteront, l'angle ε, au lieu d'avoir, comme dans le cas précédent, une valeur positive, devra avoir une valeur négative. Or, l'équation (8) a toujours, si les racines sont réelles, au moins une racine négative, et la seule condition à remplir par les données sera que les racines de (8) soient réelles, ce qui donne

$$\sin^2\mu - \frac{\cos^2\mu}{f^2} + \tang^2\lambda > 0$$

ou

$$f > \frac{\cos\mu}{\sqrt{\tang^2\lambda + \sin^2\mu}}. \tag{9}$$

On retrouve donc, dans ce cas, la condition d'équilibre déduite du théorème classique; on doit remarquer toutefois que, si l'inégalité (3) est satisfaite, l'équilibre réalisé comme nous venons de le dire sera un équilibre instable, et si l'aiguille reçoit, en son milieu G, une impulsion, si faible soit-elle, perpendiculaire au plan AOB, et dirigée vers le bas, elle se mettra en mouvement, car, l'inégalité (2) étant satisfaite, on retombe sur le cas du mouvement de l'aiguille.

Il y a donc, lorsque l'inégalité (3) est satisfaite, deux solutions également acceptables ([1]), entre lesquelles on doit choisir suivant la façon dont les conditions initiales sont réalisées. On se trouve en présence d'un fait de coincement analogue à celui que j'ai eu occasion de signaler dans le *Bulletin de la Société mathématique* ([2]).

([1]) D'une part le mouvement, si l'aiguille est simplement posée, et, d'autre part, l'équilibre instable, si on la coince par une flexion préalable.

([2]) Tome XXXIV, 1906 : *Note au sujet de certaines discontinuités apparentes dans les mouvements où intervient le frottement.*

Nous avons laissé de côté le cas où le frottement est assez grand pour empêcher tout glissement des points A et B. Si, dans ce cas, on voulait calculer les réactions de la sphère, on aurait une première équation, facile à écrire, qui donnerait la tension de l'aiguille assurant l'invariabilité de la distance AB, de sorte que T serait connu en fonction de la longueur, du poids et du coefficient d'élasticité de l'aiguille. Les équations (4), (5) et (6) subsisteraient d'ailleurs sans changement, sauf qu'il faudrait y remplacer f par f' avec la condition

$$f' \leq f; \tag{10}$$

alors, T étant connu, (5) donnerait ε; (6), f', qui devrait vérifier l'inégalité (10), et (4), N.

Il semble toutefois que l'hypothèse de la rigidité absolue des liaisons est celle qu'il convient d'adopter, du moins *a priori*, et, si on le fait, il faut, pour que le théorème classique soit exact, y introduire la restriction que nous avons indiquée.