Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 571-575
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__571_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2194.

(1912, p. 336.)

On considère les hyperboles équilatères qui passent par les sommets de grand axe d'une ellipse donnée, et qui sont tangentes en un point variable de cette ellipse. Le lieu du centre de ces hyperboles est une quartique, podaire de centre d'ellipse. (Dr W. Gaedecke.)

Solution.

Par M. Parrod.

Soient A et A′ les sommets, M le point variable de l'ellipse, M′ un point voisin de M; le centre de l'hyperbole est le deuxième point d'intersection O des deux cercles des neuf points des triangles AMM′ et A′MM′.

L'homothétie de centre M, rapport 2, nous donne les cercles tangents en A et A′ et passant par M, ils se coupent en O′ et O est le milieu de OO′.

L'axe radical MO′ rencontre AA′ en I milieu de AA′; lorsque M décrit l'ellipse, les deux rayons MA, MA′ sont homographiques; les centres ω, ω' des deux cercles précédents décrivent sur les perpendiculaires en A et A′ à AA′ deux divisions homographiques; la droite $\omega O \omega'$ enveloppe une ellipse de centre I et le point O décrit une quartique, podaire du centre de l'ellipse enveloppe de $\omega\omega'$.

Autres solutions par MM. Barisien, Bouvaist, Klug, T. Ono.

2195.

(1912, p. 336.)

La tangente en un point variable de l'ellipse de Frégier d'une ellipse donnée rencontre cette ellipse en A *et* B. *L'aire des segments elliptiques limités par la corde* AB *est constante.* (W. Gaedecke.)

Solution.

Par M. R. Bouvaist.

Une ellipse donnée et son ellipse de Frégier sont homothétiques et concentriques, on peut donc les projeter suivant deux cercles concentriques, ce qui démontre la proposition.

Autres solutions par MM. Klug, T. Ono, Parrod.

2196.

(1912, p. 384.)

Une sécante quelconque d'une ellipse donnée rencontre l'ellipse de Frégier en deux points de Frégier u et u' et l'ellipse donnée en b et c. Le cercle de diamètre bc rencontre l'ellipse donnée en deux points a et a' qui correspondent aux points u et u'. (D[r] W. Gaedecke.)

SOLUTION.

Par M. T. ONO, à Kagoshima.

Puisque les angles bac et $ba'c$ sont droits, les deux points u et u' correspondent, par définition du point de Frégier, aux points a et a'.

Autres solutions par MM. BARISIEN, KLUG.

2197.

(1912, p. 384.)

Trouver la relation qui doit exister entre les coefficients de l'équation

$$z^6 + az^5 + bz^4 + cz^3 + dz^2 + ez + f = 0$$

pour que le produit de trois des racines soit égal au produit des trois autres. (Dr W. GAEDECKE.)

SOLUTION.

Par M. PARROD.

L'équation pourra être mise sous la forme

$$(z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma)(z^3 + \alpha' z^2 + \beta' z + \gamma) = 0.$$

Identifions :

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha' &= a, & \beta\beta' + (\alpha + \alpha')\gamma &= d, \\ \alpha\alpha' + \beta + \beta' &= b, & (\beta + \beta')\gamma &= e, \\ \alpha\beta' + \beta\alpha' + 2\gamma &= c, & \gamma^2 &= f; \end{aligned}$$

β et β' sont racines de l'équation

$$y^2 - \frac{e}{\gamma} y + d - a\gamma = 0,$$

α et α' sont racines de l'équation

$$x^2 - ax + b - \frac{e}{\gamma} = 0$$

et l'on a

$$\alpha\beta' + \beta\alpha' = c - 2\gamma$$

ou

$$(\alpha + \alpha')(\beta + \beta') - (\alpha - \alpha')(\beta - \beta') = 2c - 4\gamma,$$
$$(\alpha - \alpha')^2(\beta - \beta')^2 = [2c - 4\gamma - (\alpha + \alpha')(\beta + \beta')]^2.$$

Remplaçons et simplifions, on a

$$\left(a^2 - 4b + 4\frac{e}{\gamma}\right)\left(\frac{e^2}{\gamma^2} - 4d + 4a\gamma\right) = \left(\frac{ae}{\gamma} - 2c + 4\gamma\right)^2.$$

Autres solutions par MM. BARISIEN, T. ONO.

2198.

(1912, p. 384.)

On considère le quadrilatère ABCD *inscriptible dans un cercle. Le triangle* ABC *est équilatéral, le côté* CD *est le côté du carré inscrit, et le côté* AD *est celui du dodécagone régulier inscrit. Montrer que l'aire du triangle formé par les trois diagonales de ce quadrilatère est les* $\frac{24}{13}$ *du carré qui a pour côté la distance des milieux des deux diagonales intérieures.* (E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION.

Par M. T. ONO, à Kagoshima.

Soit le rayon du cercle $= 1$, on a

$$AB = BC = CA = \sqrt{3}, \qquad CD = \sqrt{2},$$
$$AD = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}, \qquad BD = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}.$$

Soient E et F les points d'intersection de AB, DC et de AD, BC; on voit

$$\widehat{AED} = 45^\circ, \qquad \widehat{DCB} = 75^\circ, \qquad \widehat{CDF} = 60^\circ, \qquad \ldots .$$

En prenant pour axes des coordonnées la droite BC et la perpendiculaire abaissée de A à cette droite, on trouve les coordonnées des points :

$$(D)\left\{\begin{aligned} x &= \frac{1}{2},\\ z &= \frac{1+\sqrt{3}}{2};\end{aligned}\right. \qquad (E)\left\{\begin{aligned} x &= \frac{3-\sqrt{3}}{4},\\ z &= \frac{3(1+\sqrt{3})}{4};\end{aligned}\right. \qquad (F)\left\{\begin{aligned} x &= \frac{3(2+\sqrt{3})}{2},\\ y &= 0.\end{aligned}\right.$$

et, par suite, les équations des trois diagonales :

$$\begin{aligned} &(CA) && 6x + 2\sqrt{3}\,y = 3\sqrt{3},\\ &(BD) && 2x - 2y = -\sqrt{3},\\ &(EF) && 6(1+\sqrt{3})\,x + 2(9+7\sqrt{3})\,y = 9(5+3\sqrt{3});\end{aligned}$$

et enfin, les coordonnées des sommets du triangle PQR formé par ces trois diagonales :

$$(P)\left\{\begin{aligned} x &= \frac{2\sqrt{3}-3}{2},\\ y &= \frac{3(\sqrt{3}-1)}{2};\end{aligned}\right. \qquad (Q)\left\{\begin{aligned} x &= \frac{21+2\sqrt{3}}{26},\\ y &= \frac{21+15\sqrt{3}}{26};\end{aligned}\right. \qquad (R)\left\{\begin{aligned} x &= -\frac{1}{2},\\ y &= \frac{3+\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}\right.$$

On trouve que l'aire du triangle PQR est égale à $\frac{6}{13}(5-2\sqrt{3})$, et celle du carré qui a pour côté la distance des milieux de CA et BD à $\frac{1}{4}(5-2\sqrt{3})$; donc, etc.

Autre solution par M. Bouvaist.