Nouvelles annales de mathématiques

Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 566-571

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__566_1>

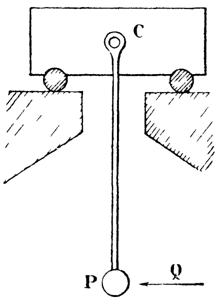
CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Besançon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Cours. — *Principe de d'Alembert, principe de Gauss ou de la moindre contrainte; équation de Lagrange.*

Problème. — *Un chariot* C *roulant sur un plan horizontal supporte l'axe de suspension d'un pendule* P; *cet axe de*

Fig. 1.

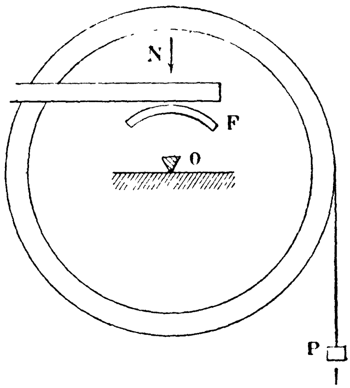


suspension est parallèle aux axes des deux paires de roues, dont les masses sont négligeables.

Étudier le mouvement de ce système à deux degrés de liberté supposé soustrait à toutes résistances passives. Étudier en particulier le cas où l'équilibre primitif vient à être rompu par une force de percussion appliquée au centre de percussion du pendule.

Étudier d'une part le cas des petites oscillations et le cas où la rotation du pendule continuera toujours dans le

Fig. 2.



même sens, charge minima μ *du chariot nécessaire à l'exécution de ce dernier mouvement, réactions entre le pendule et le chariot.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Sur une roue lestée de* 2^{m} *de diamètre formant pendule et par l'intermédiaire de frottoirs* F *cylindriques, concentriques à l'axe de la roue et de rayon égal à* $202^{mm},30$, *on a transmis au moyen de deux leviers pesants une pression normale et verticale* N *de* $13^{kg},600$.

Cinq oscillations complètes avant l'extinction du mouvement ont été observées; l'écart de la semi-amplitude initiale u_0 *et de la semi-amplitude finale* u_{10} *observée à la fin de la cinquième vibration complète correspond à un arc de la grande circonférence de la roue dont l'étendue comprend* 72^{mm}.

D'autre part, à la même température, on a observé qu'un fil tendu le long de la circonférence externe de la roue par un poids P *de* 2^{kg} *pendant librement d'un seul côté de la roue, produit une déviation angulaire de la roue qui s'accuse sur son pourtour par un déplacement linéaire de* $14^{mm},042$.

Déduire de ces deux expériences la valeur numérique *du coefficient f du frottement qui a éteint les oscillations de la roue dans la première expérience.*

Le frottement sur l'arête O du couteau de la roue est tout à fait négligeable et négligé.

(Juin 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Sur un système rigide* S *tournant autour d'un axe vertical* U *avec une vitesse angulaire constante* ω *est articulée, par un axe* A_1, *perpendiculaire à la direction de* U, *et au pied de leur plus courte distance, une barre homogène pesante dont la longueur est perpendiculaire à son axe d'articulation; à l'extrémité inférieure de cette barre et sur un axe d'articulation* A_2 *parallèle à* A_1 *est articulée une seconde barre homogène pesante, perpendiculaire à ce nouvel axe d'articulation.*

On néglige toutes résistances passives et l'on demande, connaissant les longueurs et les densités linéaires des deux barres :

1° *La figure d'équilibre relatif du système des deux barres par rapport au système* S;

2° *Les petits mouvements relatifs du système autour de sa position relative d'équilibre.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On a taillé deux cylindres de révolution, l'un en sapin, l'autre en liège.*

A quelles conditions doivent satisfaire les dimensions de l'un et de l'autre pour que chacun d'eux puisse d'une manière stable flotter sur l'eau en conservant vertical son axe de révolution.

Par rapport à l'eau, les densités du sapin et du liège sont respectivement

$$0,93 \quad \text{et} \quad 0,24.$$

(Novembre 1912.)

Caen.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une barre sans masse* AB *est fixée par une de ses extrémités* A *de telle façon qu'elle ne* *puisse se déplacer que dans un plan horizontal. A l'extrémité libre* B *on a suspendu à la Cardan un gyroscope, de façon qu'un point fixe de son axe se trouve au point* B, *tandis que l'axe peut prendre dans l'espace toutes les orientations possibles.*

1° *Montrer que les théorèmes généraux de la Mécanique permettent d'écrire trois intégrales premières des équations du mouvement de ce système. Écrire ces intégrales dans le cas général.*

2° *Adjoindre à ces trois équations le nombre d'équations nécessaire et suffisant pour déterminer le mouvement.*

3° *Étudier complètement le mouvement dans le cas particulier suivant : le point* B *coïncide avec le centre de gravité* G *du gyroscope; à l'instant initial, le gyroscope a une position quelconque. Effectuer les intégrations. Plus particulièrement, on supposera qu'à l'instant initial le gyroscope occupe une position quelconque, mais qu'il est animé d'une vitesse angulaire* r_0 *autour de son axe, tandis que le point* G *est lancé horizontalement avec une vitesse* v.

Données : $AB = a$; $BG = b$ ($b = 0$ *dans* 3°); *masse du gyroscope* $= m$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On emploie en Allemagne le procédé suivant pour déterminer la flèche des fils métalliques à grande portée : on écarte le fil de sa position d'équilibre, et on le laisse osciller sous l'action de la pesanteur.*

1° *Calculer la flèche en fonction du nombre* n *d'oscillations simples à la minute; on suppose que le fil ne se déforme pas en oscillant et se comporte par conséquent comme un corps solide; on suppose les deux points d'attache dans un même plan horizontal. On appellera* $2a$ *la portée,* f *la flèche. On assimilera tout d'abord la figure d'équilibre à une parabole, puis, dans la suite du calcul, on négligera les puissances de* f *supérieures à la première.*

Application numérique : $n = 83$. *On suppose ce nombre exact à une unité près : à quelle approximation convient-il de calculer* f?

2° *Calculer la tension maximum en supposant* $2a = 50^{m}$, *et la masse spécifique du fil égale à* 7,6.

(Juin 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Un disque plein homogène est assujetti à rouler sans glisser sur une droite horizontale. Au début du mouvement, sa vitesse est nulle et son plan est vertical. On suppose le disque infiniment plat et l'on néglige le frottement.*

Le disque est soumis à l'action d'une force. parallèle à l'horizontale sur laquelle se meut le disque. Cette force est appliquée en un point fixe du disque, et elle dépend uniquement de l'angle θ *dont celui-ci a tourné depuis l'instant initial. On la désignera par* $m\mathrm{P}(\theta)$.

1° *Montrer que l'étude du mouvement du disque se ramène aux quadratures.*

2° *On suppose* $\mathrm{P}(\theta)$ *donné par le développement en série*

$$\mathrm{P}(\theta) = a_0 + a_1 \cos(\theta + \varphi_1) + a_2 \cos(2\theta + \varphi_2) + \ldots + a_n \cos(n\theta + \varphi_n) + \ldots.$$

Quelle relation doit-il y avoir entre les coefficients de cette série pour que la vitesse reprenne sa valeur après un tour complet du disque? Montrer qu'alors le mouvement est périodique.

3° *On suppose le disque soumis en outre à une force, également parallèle à la droite donnée, appliquée au centre, et proportionnelle au carré de la vitesse de translation. Étudier complètement le mouvement en supposant la force* $\mathrm{P}(\theta)$ *égale à* $\mathrm{A}\sin\theta$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère une portion de l'héliçoïde gauche à plan directeur*

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta,$$
$$z = a\theta$$

limitée : 1° *par le cylindre d'axe* Oz *et de rayon* R; 2° *par deux plans passant par* Oz *et faisant entre eux l'angle* α.

Sur chaque élément, ds, *de surface, agit une force pro-*

portionnelle et normale à cet élément, proportionnelle au carré de sa vitesse et au sinus de l'angle i que fait le plan tangent avec le plan xOy.

Quelle sera la puissance nécessaire pour faire tourner la surface autour de Oz avec une vitesse angulaire constante, ω, en supposant que, dans ce mouvement, les forces appliquées aux éléments de surface agissent comme résistances ?

Application numérique : $R = 200$ (C.G.S); *pas de l'hélicoïde* $= 100\pi$; $\alpha = 30^\circ$; $\omega = 100$ *tours à la minute.*

L'expression de la force est $kv^2 \sin i \, ds$, *et l'on a*

$$k = 8.10^{-5} (\text{C.G.S.}).$$

(Novembre 1912.)