A. MYLLER

Sur les courbes autopolaires

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 562-566

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__562_1>

[L[1]2c]

SUR LES COURBES AUTOPOLAIRES;

PAR M. A. MYLLER.

Dans un article publié dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1894), M. P. Appell a étudié les courbes autopolaires, c'est-à-dire les courbes qui coïncident avec leurs polaires réciproques par rapport à une conique directrice donnée. Il a montré en particulier que toute *courbe autopolaire* peut être considérée comme enveloppe d'une série de *coniques autopolaires*.

En me rapportant à ce résultat je me propose d'établir quelques propriétés de ces courbes d'où il résulte un procédé géométrique simple pour les construire.

Soient

$$(1) \qquad Ax^2 + By^2 - 1 = 0$$

l'équation de la conique directrice et

$$(2) \qquad A\alpha x + B\beta y - 1 = 0$$

l'équation d'une droite arbitraire. Soient E, F les points de rencontre de la droite (2) avec (1) et P le pôle (α, β) de cette droite. Considérons la conique tangente en E et F à la conique (1) et telle que ses rayons de courbure en E et F soient égaux et de directions contraires à ceux de (1) dans les mêmes points. L'équation de cette conique qu'on obtient sans difficulté est

$$(3)\quad 2(A\alpha x + B\beta y - 1)^2 - (A\alpha^2 + B\beta^2 - 1)(Ax^2 + By^2 - 1) = 0.$$

On constate que cette équation coïncide avec l'équation connue des coniques autopolaires par rapport à (1).

Laissons le point P se mouvoir sur une courbe donnée

$$(4)\qquad \varphi(\alpha, \beta) = 0.$$

La conique (3) enveloppera alors une courbe autopolaire

$$(5)\qquad f(x, y) = 0.$$

Nous allons chercher les points de contact de (3) avec l'enveloppe (5). Ces points sont à l'intersection de (3) avec la conique suivante obtenue en différentiant l'équation (3) :

$$\begin{aligned} &2(A\alpha x + B\beta y - 1)(Ax\,d\alpha + By\,d\beta) \\ &\quad - (Ax^2 + By^2 - 1)(A\alpha\,d\alpha + B\beta\,d\beta) = 0. \end{aligned}$$

Par ces quatre points passe le faisceau

$$\begin{aligned} &2(A\alpha x + B\beta y - 1)[A\alpha x + B\beta y - 1 + \lambda(Ax\,d\alpha + By\,d\beta)] \\ &\quad - (Ax^2 + By^2 - 1)[A\alpha^2 + B\beta^2 - 1 + \lambda(A\alpha\,d\alpha + B\beta\,d\beta)] = 0. \end{aligned}$$

En prenant

$$\lambda = -\frac{A\alpha^2 + B\beta^2 - 1}{A\alpha\,d\alpha + B\beta\,d\beta},$$

on obtient deux droites qui passent par les points de contact de (3) avec son enveloppe (5). L'une est la droite (2) comme il était à prévoir, car la conique (1) est une partie de l'enveloppe (5); l'autre a l'équation

$$(6)\quad \begin{aligned} &\mathrm{A}[(1-\mathrm{B}\beta^2)\,d\alpha+\mathrm{B}\alpha\beta\,d\beta]\,x \\ &\quad+\mathrm{B}[\mathrm{A}\alpha\beta\,d\alpha+(1-\mathrm{A}\alpha^2)\,d\beta]\,y-\mathrm{A}\alpha\,d\alpha-\mathrm{B}\beta\,d\beta=0. \end{aligned}$$

Cette droite coupe (3) en deux points G et H qui appartiennent à la courbe autopolaire (5) et se correspondent dans la transformation.

La droite (6) est caractérisée géométriquement par les deux propriétés suivantes qu'on déduit facilement :

1° *Elle passe par le point* P;

2° *Elle est conjuguée harmonique de la tangente en* P *à la courbe* (4) *par rapport aux deux tangentes* PE *et* PF *menées de* P *à la conique directrice* (1).

Déterminons les tangentes en G et H à la courbe (3). Dans ce but, prenons les droites PE et PF comme nouveaux axes des coordonnées Ox et Oy. Soient K et L les points de rencontre de la tangente en P à la courbe (4) avec la conique directrice et T l'intersection de la même tangente avec la corde de contact EF.

L'équation (1) de la conique directrice prend dans le nouveau système d'axes la forme suivante :

$$(7)\qquad a^2x^2+2mxy+b^2y^2+2ax+2by+1=0,$$

et l'équation (3) de la conique autopolaire tangente en E et F devient

$$(8)\quad a^2x^2+2(2ab-m)xy+b^2y^2+2ax+2by+1=0.$$

Soit

$$y=kx$$

l'équation de la tangente PKL; celle de la droite PGH sera alors

$$y = -kx,$$

L'équation du faisceau de coniques tangentes en G et H à la conique (8) est

$$a^2x^2 + 2(2ab - m)xy \\ + b^2y^2 + 2ax + 2by + 1 - \rho(y + kx)^2 = 0,$$

ou encore

$$a^2x^2 + 2(2ab - m - 2k\rho)xy \\ + b^2y^2 + 2ax + 2by + 1 - \rho(y - kx)^2 = 0.$$

En prenant

$$\rho = \frac{ab - m}{2k} = \theta^2,$$

on obtient l'équation suivante des deux tangentes TG et TH qui passent par le point T

$$(ax + by + 1)^2 - \theta^2(y - kx)^2 = 0.$$

Soit Q le point d'intersection de la droite PGH avec EF. L'équation des tangentes QK et QL s'obtient de la même manière et elle est

$$(ax + by + 1)^2 - \theta^2(y + kx)^2 = 0,$$

où θ a la même signification que précédemment.

Les points G, H, K, L étant déterminés comme intersections des droites dont nous avons trouvé les équations, on peut alors facilement écrire les équations des droites HK, GL, GK, HL qui sont les suivantes :

(HK) $\qquad ax + (b - 2\theta)y + 1 = 0,$

(GL) $\qquad ax + (b + 2\theta)y + 1 = 0,$

(GK) $\qquad (a - 2k\theta)x + by + 1 = 0,$

(HL) $\qquad (a + 2k\theta)x + by + 1 = 0.$

On constate que les droites HK et GL passent par le point E, les droites GK et HL par le point F.

Ce dernier résultat nous indique la construction géométrique simple pour déterminer les point G et H de la courbe (5) ainsi que les tangentes quand on donne le point P de la courbe (4).