NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 518-528

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__518_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1913, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2165.

(1910, p. 527.)

Soit ABCDEF *un hexagone inscrit ou circonscrit à une conique; soient* L, M, N *les points de rencontre respectifs des couples de côtés* CD, FA : BC, EF : AB, DE. *Démontrer la relation*

$$\frac{\mathrm{AL.DL}}{\mathrm{FL.CL}}\,\frac{\mathrm{BN.EN}}{\mathrm{AN.DN}}\,\frac{\mathrm{CM.FM}}{\mathrm{BM.EM}}=1.$$

(KLUG.)

SOLUTION

Par M. T. ONO (Kagoshima).

Soient L′, M′, N′ les points de rencontre respectifs des couples de droites AC, MN; CE, NL; AE, LM. Les trois triangles AFE, EDC, CBA sont coupés respectivement par les transversales LM, NL, MN. On a donc

$$(1)\qquad \frac{\mathrm{AL}}{\mathrm{FL}}\,\frac{\mathrm{FM}}{\mathrm{EM}}\,\frac{\mathrm{EN'}}{\mathrm{AN'}}=1,$$

$$(2)\qquad \frac{\mathrm{DL}}{\mathrm{CL}}\,\frac{\mathrm{CM'}}{\mathrm{EM'}}\,\frac{\mathrm{EN}}{\mathrm{DN}}=1,$$

$$(3)\qquad \frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{BM}}\,\frac{\mathrm{BN}}{\mathrm{AN}}\,\frac{\mathrm{AL'}}{\mathrm{CL'}}=1.$$

1° Dans le cas de l'hexagone inscrit, d'après le théorème de Pascal, les trois points L, M, N sont en ligne droite; ainsi donc L′, M′, N′ sont sur cette droite. Alors le triangle AEC étant coupé par la transversale L′M′N′, on a

$$(4)\qquad \frac{\mathrm{EN'}}{\mathrm{AN'}}\,\frac{\mathrm{AL'}}{\mathrm{CL'}}\,\frac{\mathrm{CM'}}{\mathrm{EM'}}=1.$$

Ces relations (1), (2), (3), (4) donnent de suite, par multiplication, la relation indiquée en question.

2° Dans le cas de l'hexagone circonscrit, d'après le théorème de Brianchon, les droites AD, BE, CF se coupent en un point P; ainsi on a trois systèmes de triangles homologiques :

AFE, BCD; EDC, FAB; FED, ABC.

Donc les droites BD, BF, FD passent respectivement par les points N', M', L'; et aussi, les deux triangles AEC, DBF étant homologiques, ces points L', M', N' sont en ligne droite; on a donc de même la relation (4). Ainsi, on arrive au même résultat.

2168.

(1910, p. 528.)

m et p étant deux entiers quelconques et C_m^p désignant le nombre de combinaisons de m lettres p à p, on a

1° $$\frac{1}{p+m} - \frac{C_m^1}{m+p-1} + \frac{C_m^2}{m+p-2} - \dots + (-1)^m \frac{C_m^m}{p} = (-1)^m \frac{1}{p} \frac{1}{C_{m+p}^p};$$

2° *Si* $m \geqq p$,

$$\frac{1}{p} - \frac{C_m^1}{p-1} + \frac{C_m^2}{p-2} - \dots + (-1)^{p-1} \frac{C_m^{p-1}}{1} = (-1)^{p-1} \left(\frac{1}{m-p+1} + \frac{1}{m-p+2} + \dots + \frac{1}{m} \right) C_m^p.$$

(Letierce.)

SOLUTION

Par M. T. Ono (Kagoshima).

Au moyen de la méthode de décomposition d'une fraction en fractions simples ou bien en ayant recours à l'induction complète, on peut facilement vérifier l'identité suivante :

$$\frac{1}{x} - \frac{C_m^1}{x-1} + \frac{C_m^2}{x-2} - \dots + (-1)^m \frac{C_m^m}{x-m} = (-1)^m \frac{m!}{x(x-1)(x-2)\dots(x-m)}.$$

Alors, en posant $x = m + p$, on obtient l'identité 1°.

Nous allons de même appliquer la méthode d'induction pour établir l'identité 2°. Supposons qu'on ait, pour quelque entier m,

$$(1)\quad \frac{1}{p} - \frac{C_m^1}{p-1} + \frac{C_m^2}{p-2} - \ldots + (-1)^{p-1}\frac{C_m^{p-2}}{1}$$
$$= (-1)^{p-1}\left(\frac{1}{m-p+1} + \frac{1}{m-p+2} + \ldots + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m}\right) C_m^p;$$

on peut substituer $p-1$ au lieu de p, et l'on aura

$$(2)\quad \frac{1}{p-1} - \frac{C_m^1}{p-2} + \frac{C_m^2}{p-3} - \ldots + (-1)^{p-2}\frac{C_m^{p-2}}{1}$$
$$= (-1)^{p-2}\left(\frac{1}{m-p+2} + \frac{1}{m-p+3} + \ldots + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m}\right) C_m^{p-1}.$$

En retranchant membre à membre et en remarquant qu'on a

$$C_m^p + C_m^{p-1} = C_{m+1}^p, \qquad \frac{C_m^p}{m-p+1} = \frac{1}{m+1} C_{m+1}^p,$$

on obtient

$$\frac{1}{p} - \frac{C_{m+1}^1}{p-1} + \frac{C_{m+1}^2}{p-2} - \ldots + (-1)^{p-1}\frac{C_{m+1}^{p-1}}{1}$$
$$= (-1)^{p-1}\left(\frac{1}{m-p+2} + \frac{1}{m-p+3} + \ldots + \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1}\right) C_{m+1}^p.$$

Donc, etc.

2185.

(1912, p. 48.)

Les points de rencontre des génératrices perpendiculaires d'un paraboloïde hyperbolique sont sur une hyperbole; les plans de ces génératrices enveloppent un cône du second ordre dont les lignes focales sont perpendiculaires aux plans directeurs du paraboloïde.

(KLUG).

SOLUTION

Par M. R. Bouvaist.

Soit M un point du paraboloïde par où passent deux génératrices MA et MB rectangulaires, soit MC la normale en M à la surface, le trièdre trirectangle MABC est circonscrit au paraboloïde, le point M appartient donc à l'hyperbole H, intersection de la surface avec son plan de Monge.

Quand M varie, le plan MAB enveloppe le cône circonscrit au paraboloïde le long de l'hyperbole H. Soient S le sommet de ce cône, SD une perpendiculaire à l'un des plans directeurs; un plan tangent au paraboloïde mené par SD coupe la surface suivant deux génératrices rectangulaires MA et MB, MA par exemple est perpendiculaire à SD, MB est parallèle à SD; or, si les plans directeurs ne sont pas rectangulaires, il ne peut y avoir sur la surface de génératrices parallèles à SD; dans le cas général MA et MB sont donc isotropes et SD est une focale du cône de sommet S et de base H.

Dans le cas où le paraboloïde considéré est équilatère, le plan de Monge devient le plan tangent au sommet de cette surface et le cône S se réduit à ce plan.

Autre solution par M. Parrod.

2186.

(1912, p. 48.)

Si l'on désigne par p un nombre premier et par P *le nombre p^α, α pouvant être nul, le nombre*

$$C_{P(p-1)}^{P.k} - (-1)^k$$

est multiple de p.

(G. F.)

SOLUTION

Par M. L. Grosschmid.

On voit tout d'abord que l'hypothèse, que p est un nombre premier impair ne constitue aucune restriction, car pour $p = 2$ les deux valeurs possibles de k (0 et 1) permettent une vérification directe.

La divisibilité de $C_{P(p-1)}^{P\,0} - (-1)^0$, comme celle de

$$C_{P(p-1)}^{P(p-1)} - (-1)^{p-1},$$

par p est évidente; on peut donc supposer $0 < k < p - 1$. En remarquant qu'on a

$$(1) \qquad C_{P(p-1)}^{P.k} = \frac{[P(p-1)]!}{(Pk)!.[P(p-1) - Pk]!},$$

on voit aisément que, dans le second membre, p figure à la même puissance au numérateur qu'au dénominateur. C'est ce que l'on constate grâce à l'expression bien connue [1]

$$h_{m!} = \sum_{i=1}^{\infty} E\left(\frac{m}{p^i}\right),$$

qui donne l'exposant de la plus haute puissance de p divisant le produit $m! = 1.2.3\ldots m$. [On a désigné, suivant l'usage, par $E(x)$ le plus grand entier inférieur ou égal à x.]

En appliquant cette formule au numérateur $N = [P(p-1)]!$, on trouve

$$h_N = p^\alpha - 1 = P - 1,$$

et pour le dénominateur

$$h_D = k\,\frac{P-1}{p-1} + (p-1)\,\frac{P-1}{p-1} - k\,\frac{P-1}{p-1};$$

donc $h_N = h_D$. Les puissances les plus hautes de p qui divisent l'une le numérateur, l'autre le dénominateur de la fraction (1) étant les mêmes, ceci aura encore lieu pour la fraction.

$$(2) \qquad C_{P(p-1)}^{P.k} = \frac{P(p-1)\ldots[P(p-1) - Pk + 1]}{(P.k)!}.$$

Ainsi, en supprimant dans cette fraction (2) la plus haute

---

[1] *Voir*, par exemple, Dirichlet-Dedekind, *Zahlentheorie*, p. 27.

puissance de p, on arrive à la forme suivante

$$C_{P(p-1)}^{P.k} = \frac{r}{s},$$

où r et s sont premiers avec p.

Cela étant, on voit que la congruence

$$(3) \qquad r \equiv (-1)^k s \pmod p$$

est équivalente à la congruence proposée.

Vérifions cette congruence (3).

Soit $1 \leqq \beta \leqq \alpha - 1$; on aperçoit tout de suite que les facteurs du produit $1.2\ldots Pk$, qui sont divisibles par $p^{\beta+1}$, ont la forme

$$\lambda p^\alpha + a_1 p^{\alpha-1} + \ldots + a_{\alpha-\beta-1} p^{\beta+1} + a_{\alpha-\beta} p^\beta = f_\beta,$$

où

$$0 \leqq \lambda \leqq k-1; \quad 0 \leqq a_i \leqq p-1 \ (i = 1, 2, \ldots, \alpha - \beta); \quad \alpha - \beta \neq 0.$$

A tout facteur de cette espèce correspond un facteur du numérateur, à savoir

$$P(p-1) - f_\beta.$$

En divisant par p^β les facteurs qui se correspondent, on trouve

$$\lambda p^{\alpha-\beta} + a_1 p^{\alpha-\beta-1} + \ldots + a_{\alpha-\beta-1} p + a_{\alpha-\beta} = \frac{f_\beta}{p^\beta}$$

pour les uns et

$$\frac{P}{p^\beta}(p-1) - \frac{f_\beta}{p^\beta} = p^{\alpha-\beta}(p-1) - \frac{f_\beta}{p^\beta} \qquad (\alpha - \beta \geqq 1)$$

pour les autres.

D'autre part, il est clair que les seuls facteurs des produits considérés, qui contiennent p^α, sont

$$1p^\alpha, \quad 2p^\alpha, \quad \ldots, \quad (k-1)p^\alpha, \quad kp^\alpha$$

pour le dénominateur et

$$P(p-1), \quad P(p-1) - 1p^\alpha, \quad \ldots, \quad P(p-1) - (k-1)p^\alpha$$

pour le numérateur.

Ces termes donnent après division par p^α :

$$1,\quad 2,\quad \ldots,\quad k-1,\quad k$$

et

$$p-1,\quad p-2,\quad \ldots,\quad p-(k-1),\quad p-k.$$

Ces préliminaires établis, on est conduit à l'égalité

$$r=(p-1)(p-2)\ldots(p-k)\,\mathrm{A}\,\Pi\left[p^{\alpha-\beta}(p-1)-\frac{f\beta}{p^\beta}\right],$$

où A désigne le produit de ceux des facteurs de r, qui sont de la forme $\mathrm{P}(p-1)-\rho$, où ρ est premier avec p.

Pour la même raison on trouve

$$s=k!\,\mathrm{B}\,\Pi\frac{f\beta}{p^\beta},$$

où B signifie le produit des ρ, qui figurent dans A.

Enfin, si nous tenons compte de ce que $p^\alpha-1$ est pair et que le nombre total des facteurs, qui se trouvent dans r, est $p^\alpha k$, les raisonnements précédents montrent qu'on a

$$r\equiv(-1)^k k!\,(-1)^{(p^\alpha-1)k}\,\Pi\rho\,\Pi\frac{f\beta}{p\beta}\equiv(-1)^k s \pmod{p}.$$

C. Q. F. D.

Autres solutions par MM. E.-A. Egervary, T. Ono.

2187.

(1912, p. 48.)

La somme des produits qu'on obtient en multipliant trois à trois les entiers inférieurs à n est

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}\times\frac{n(n-1)}{2}.$$

(G. F.)

Solution.

Par M. R. Bouvaist.

On connaît la formule

$$(a+b+c+\ldots+l)^3=\Sigma a^3+3\Sigma a^2 b+6\Sigma abc;$$

si, d'autre part, a, b, c, $\ldots$, l sont les entiers consécutifs

$1, 2, \ldots, n-1,$

$$(a+b+\ldots+l)^3 = \frac{n^3(n-1)^3}{8}, \qquad \Sigma a^3 = \frac{n^2(n-1)^2}{4},$$

$$\Sigma a^2 b = \Sigma a^2 \,\Sigma a - \Sigma a^3$$

$$= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \times \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)^2 n^2}{4},$$

d'où

$$\Sigma abc = \frac{1}{6}\,\frac{n^2(n-1)^2}{4}\left[\frac{n(n-1)}{2} - 2n + 3\right]$$

$$= \frac{1}{6}\,\frac{n^2(n-1)}{4} \times \frac{n^2 - 5n + 6}{2},$$

$$\Sigma abc = \frac{n(n-1)\,n-2)(n-3)}{24} \times \frac{n(n-1)}{2}.$$

Autres solutions par MM. Barisien, Lemaire, Parrod, G. Polya, T. Ono.

2188.

(1912, p. 96.)

Si les côtés d'un angle droit sont tangents à deux coniques homofocales, la droite qui joint les points de contact enveloppe une conique homofocale aux deux premières.

(Klug.)

SOLUTION

Par M. J. Lemaire.

Cet énoncé est un simple cas particulier de la proposition corrélative de la question 2190.

Autres solutions par MM. Barisien, Bouvaist, Egan, T. Ono.

2189.

(1912, p. 96.)

Si par les extrémités d'un diamètre d'un cercle on mène deux tangentes non parallèles à une conique concentrique au cercle, la droite qui joint les points de contact enveloppe une conique homofocale à la première.

(Klug.)

SOLUTION

Par M. J. Lemaire.

Supposons que la conique donnée soit une ellipse de centre O, et soient A et A′ deux points symétriques par rapport à O, tels que $OA = OA' = r$; menons de ces points deux tangentes non parallèles qui se coupent en T, et qui touchent l'ellipse en B et B' : la droite OT passant aux milieux de AA' et de BB', ces deux dernières droites sont parallèles.

Ceci posé, soient F et F' les foyers, C et C' leurs projections sur la tangente AB, D et D' leurs projections sur la droite BB'; joignons OC, FB, F'B; OC est parallèle à F'B; posons

$$\alpha = \widehat{FBC} = \widehat{F'BC'} = \widehat{OCC'},$$

$$\beta = \widehat{OAB} = \widehat{B'BT}.$$

La figure donne

$$FC.F'C' = FB.F'B' \sin^2\alpha,$$

d'où

$$FB.F'B' = \frac{b^2}{\sin^2\alpha},$$

b désignant le demi-petit axe de l'ellipse.

D'ailleurs

$$\begin{aligned} FD.F'D' &= FB.F'B' \sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) \\ &= \frac{b^2}{\sin^2\alpha}(\sin^2\alpha - \sin^2\beta) \\ &= b^2 - b^2\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}. \end{aligned}$$

Mais le triangle OCA donne, a désignant le demi-axe focal de l'ellipse,

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{OC}{OA} = \frac{a}{r}.$$

Donc

$$FD.F'D' = b^2 - b^2\frac{a^2}{r^2}.$$

L'enveloppe de BB' est par conséqnent une conique de foyers F et F'.

Nous avons supposé $r > a$, d'où $\alpha > \beta$, BB' laisse les foyers d'un même côté, l'enveloppe est une ellipse.

Si $r < a$, BB' passe entre F et F', on a alors

$$FD.F'D' = \frac{b^2}{r^2}(a^2 - r^2);$$

l'enveloppe est une hyperbole.

Dans le cas particulier où $r = a$, l'enveloppe se réduit aux deux foyers.

Autres solutions par MM. BARISIEN, BOUVAIST, EGAN, T. ONO.

2190.

(1912, p. 96.)

Étant données deux coniques dans un même plan, on leur mène des tangentes aux points où elles sont rencontrées par une droite quelconque. Les sommets du quadrilatère ainsi formé, qui ne sont pas les points de rencontre de tangentes à une même conique, sont sur une conique appartenant au faisceau ponctuel déterminé par les deux coniques proposées. (THIÉ.)

SOLUTION

Par M. T. ONO (Kagoshima).

Soient $S = 0$, $S_1 = 0$ deux coniques et $P = 0$ une droite. Si l'on désigne par (x', y'), (x'', y'') les pôles de cette droite par rapport aux deux coniques, on aura les équations des deux systèmes des tangentes

$$SS' - P^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad S_1 S''_1 - P^2 = 0,$$

où S' et S''_1 sont les puissances respectives de (x', y'), (x'', y'') par rapport à S, S_1. Donc les points d'intersection de ces tangentes sont sur une conique représentée par l'équation

$$SS' - S_1 S''_1 = 0.$$

Autres solutions par MM. BOUVAIST, EGAN, KLUG, J. LEMAIRE.

M. LEMAIRE ajoute la remarque suivante : *Corrélativement, si d'un point on mène des tangentes à deux coniques, les quatre droites obtenues en joignant leurs points de contact, autres que celles qui joignent les points de contact appartenant à une même conique, sont tangentes à une conique du faisceau tangentiel déterminé par les deux coniques proposées.*

M. KLUG fait observer que l'énoncé de la question 2190 se trouve dans le *Traité des sections coniques* de Chasles (p. 279), où il apparaît comme conséquence d'un théorème plus général.

2191.

(1912, p. 144.)

On considère un rectangle ABCD *variable, circonscrit à une ellipse dont l'un des foyers est* F.

Le centre du cercle circonscrit au triangle FAB, *son orthocentre et le centre de son cercle des neuf points ont pour lieux des cercles.* (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. R. Bouvaist.

Soient A et B les intersections d'une tangente à une ellipse de centre O et de foyers F et F′ avec le cercle de Monge de cette courbe, soient φ et φ' les projections de F et F′ sur AB. Soit H l'orthocentre de FAB, on a visiblement

$$\varphi A.\varphi B = a^2 + b^2 - \overline{O\varphi}^2 = b^2 = \varphi F.\varphi H = F\varphi.F'\varphi',$$

d'où

$$F'\varphi' = H\varphi;$$

la droite F′H est donc perpendiculaire sur $F\varphi$ et le lieu de H est le cercle de diamètre FF′.

Soit K le point diamétralement opposé à F sur le cercle FAB, ce point est sur $F'\varphi'$ puisque $A\varphi = \varphi' B$; d'autre part,

$$K\varphi' = \varphi H = \varphi' F'.$$

K est donc le symétrique de F′ par rapport à AB; si a est le demi-grand axe de l'ellipse, $FK = 2a$; le rayon du cercle FAB est donc constant et le lieu du centre de ce cercle est le cercle de centre F et de rayon a.

L'axe radical du cercle de diamètre FF′ et du cercle FAB est la parallèle à AB menée par F; cette droite coupe le cercle FF′ et par suite le cercle FAB au point H′ diamétralement opposé à H sur le cercle FF′, le cercle des neuf points de FAB passe par suite par le milieu O de HH′, et, comme son rayon est constant et égal à $\frac{a}{2}$, son centre décrit le cercle de centre O et de rayon $\frac{a}{2}$.

Autres solutions par MM. Klug, Sicard, T. Ono.