NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Concours d'admission à l'École normale supérieure et aux bourses de licence en 1913

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 464-469
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__464_0>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET AUX BOURSES DE LICENCE EN 1913.

Composition de Mathématiques.

(Sciences. — I.)

PREMIÈRE COMPOSITION.

Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz, *on considère la surface* (S) *définie par l'équation*

$$z = xy + x^3,$$

et la droite (D) *définie par les équations*

$$y = b, \qquad z = c$$

où b et c sont deux constantes données, la seconde n'étant pas nulle. Dans tout ce qui suit cette droite (D) *restera fixe.*

1° *Montrer que la surface* (S) *est réglée et trouver ses génératrices.*

2° *A chaque génératrice rectiligne* (G) *de la surface* (S) *on fait correspondre le plan* (P) *mené par la droite* (D) *et parallèle à la symétrique de* (G) *par rapport au plan* xOy. *Déterminer le lieu du point d'intersection de* (G) *et de* (P), *quand la droite* (G) *décrit la surface* (S

Montrer que ce lieu est une courbe (C) *située sur une quadrique* (Q) *et déterminer cette quadrique.*

3° *Former l'équation du quatrième degré donnant les abscisses des points d'intersection de la courbe* (C) *avec un plan donné par son équation*

$$ux + vy + wz + s = 0.$$

Calculer les fonctions symétriques élémentaires des racines en fonction de u, v, w, s. En déduire la relation à laquelle doivent satisfaire les abscisses x_1, x_2, x_3, x_4, de quatre points de la courbe (C) *pour que ces quatre points soient dans un même plan.*

Cette relation sera utile dans la plupart des questions qui vont suivre.

4° *Déduire de la relation précédente les relations auxquelles doivent satisfaire les abscisses x_1, x_2, x_3 de trois points de la courbe* (C) *pour que ces trois points soient en ligne droite.*

Former l'équation générale du troisième degré dont les racines sont les abscisses de trois points en ligne droite de la courbe (C). *Montrer que les droites qui coupent la courbe* (C) *en trois points engendrent l'une des familles de génératrices rectilignes de la quadrique* (Q).

5° *Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que les plans osculateurs à la courbe* (C) *en trois points donnés se coupent sur la courbe* (C) *est que ces trois points soient en ligne droite.*

6° *Par un point quelconque* M *de la courbe* (C) *il passe deux plans jouissant de la propriété d'être tangents à la courbe* (C) *au point* M *et en un autre point* (*c'est-à-dire d'être bitangents à la courbe*). *Soient* M′ *et* M″ *les seconds points de contact de ces* *deux plans. Montrer qu'il existe un plan bitangent à la courbe* (C) *en* M′ *et* M″.

A quelles relations doivent satisfaire les abscisses de trois points M, M′, M″ *de la courbe* (C) *pour que deux quelconques d'entre eux soient les points de contact d'un plan bitangent à la courbe* (C)?

7° *Former l'équation générale du troisième degré dont les racines sont les abscisses de trois points* M, M′, M″, *de la courbe* (C) *satisfaisant aux conditions précédentes. Exprimer les coefficients de cette équation au moyen de l'abscisse* ξ *du quatrième point d'intersection* μ *de la courbe* (C) *avec le plan* (Π) *déterminé par les points* M, M′, M″.

Calculer, en fonction de ξ, *les coefficients de l'équation du plan* (Π) *et les coordonnées du point de concours* A *des tangentes à la courbe* (C) *aux points* M, M′, M″. *Ce point* A *sera dit le point* associé *au point* μ *de la courbe* (C).

8° *Montrer qu'il existe une infinité de quadriques, ne dépendant que de b et de c, par rapport auxquelles le point* A *est le pôle du plan* (Π); *déterminer ces quadriques et montrer que l'une d'elles est la quadrique* (Q) *déjà considérée.*

Déterminer le lieu (Γ) *du point* A, *ainsi que l'enveloppe du plan* (Π), *quand le point* μ *décrit la courbe* (C).

9° *A trois points quelconques en ligne droite* μ_1, μ_2, μ_3, *pris sur la courbe* (C), *sont associés les trois sommets* A_1, A_2, A_3, *d'un triangle inscrit dans la courbe* (Γ). *Déterminer, en supposant* $b = 0$, *l'enveloppe des côtés de ce triangle quand la droite* $\mu_1\mu_2\mu_3$ *varie. Montrer que, dans la même hypothèse* $b = 0$, *le cercle circonscrit de ce triangle* $A_1A_2A_3$ *passe par deux points fixes.*

DEUXIÈME COMPOSITION.

On donne deux axes rectangulaires et l'on considère l'équation différentielle

$$y - 2xy' + y^2 y'^3 = 0.$$

1° *Montrer que cette équation admet une infinité de courbes intégrales* C, *dont l'équation est de la forme* $y^2 = f(x)$, $f(x)$ *désignant un polynome en* x. *Écrire l'équation générale des courbes* C; *montrer que, par tout point du plan, il passe, soit une, soit trois courbes* C, *et déterminer la région du plan où doit se trouver le point pour que le nombre des courbes qui y passent soit égal à trois; déterminer le lieu des points tels que deux des courbes* C *qui passent par l'un d'eux soient orthogonales.*

2° *On donne le point* A $(x = 0,5; y = 0)$. *Soit* P *celle des courbes* C *qui passe par* A *et tourne sa concavité vers la partie positive de l'axe* Ox; *soit* B *le point de la courbe* P *qui a pour ordonnée* $\sqrt{6}$. *Soit* Q *celle des courbes* C *passant par* B *et qui tourne sa concavité vers les* x *négatifs; soit enfin* A′ *le point où cette courbe coupe l'axe* Ox. *Calculer l'aire limitée par les arcs de courbes* AB, BA′, *et l'axe* Ox.

3° *Un point mobile, partant de* A, *parcourt successivement l'arc* AB *de* P, *puis l'arc* BA′ *de* Q. *Son accélération tangentielle est constamment égale à sa vitesse, et sa vitesse initiale est égale à* 1; *au point* B *on supposera que la vitesse ne subit pas de changement de grandeur, mais seulement un changement de direction. Calculer à* 0,1 *près le temps mis par le mobile pour parcourir l'arc* ABA′.

4° *Au point* B, *l'accélération du mobile subit une* *discontinuité. Calculer par ses projections sur les deux axes de coordonnées la variation géométrique du vecteur-accélération au point* B.

Composition de Mathématiques.

(Sciences. — II.)

I. *On considère dans un plan deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy. *Un point matériel* M, *de masse égale à* 1, *est mobile dans ce plan sous l'action d'une force* (F) *dont les projections* X *et* Y *sur les axes sont :*

$$X = x, \qquad Y = y - 4x,$$

x *et* y *désignant les coordonnées du point* M.

1° *Former et intégrer les équations différentielles du mouvement du point* M.

2° *Déterminer le mouvement du point* M *en supposant qu'à l'origine du temps ses coordonnées sont* $(\alpha, 0)$ *et que sa vitesse a pour projections sur les axes* $(-\alpha, 2\alpha)$. *Construire la trajectoire* (T) *correspondant de ce mouvement.*

3° *Évaluer le temps mis par le mobile pour aller d'un point quelconque* M *de sa trajectoire* (T) *au point* M' *où la tangente à la trajectoire est parallèle au rayon vecteur* OM.

4° *Démontrer que l'hodographe du mouvement est une courbe homothétique de la trajectoire* (T) *et calculer à* 0,01 *près le rapport d'homothétie.*

5° *La trajectoire* (T) *passe par le point* O. *Évaluer, en fonction de l'abscisse du point* M, *l'aire limitée par l'arc de courbe* OM *et la corde* OM, *ainsi que le volume engendré par cette aire tournant autour de* Oy.

II. *Évaluer à* 0,01 *près les intégrales*

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{2\cos x + 3}, \qquad \int_0^{\pi} \frac{dx}{(2\cos x + 3)^2}.$$