Concours d'admission à l'École polytechnique en 1913

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 461-463
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__461_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1913.

Composition de Géométrie analytique et mécanique.

Dans le plan $x\mathrm{O}y$ *du trièdre des coordonnées* $\mathrm{O}xyz$, *on donne le cercle de rayon* r, *tangent à* $\mathrm{O}y$ *au point* O, *du côté de* $\mathrm{O}x$; *sur la circonférence, les points* A *et* B *situés à la distance* r *du point* O.

I. *Un point quelconque* P *de la circonférence est la projection d'un point* M *dont la cote est*

$$z = \mathrm{PA} + \mathrm{PB}.$$

1° *Calculer les coordonnées* x, y, z *du point* M *en fonction de l'angle polaire* $\mathrm{PO}x = \omega$ *du point* P.

2° *Le lieu du point* M *est une courbe* Γ. *En construire les projections sur les plans* $x\mathrm{O}z$, $y\mathrm{O}z$.

II. *Soit* C *le point d'abscisse* $-r$ *pris sur le prolongement de* $\mathrm{O}x$; A, B, C *sont les points d'appui sur le plan horizontal, supposé rigide, de trois pieds sphériques identiques fixés aux trois sommets d'une lame triangulaire homogène.*

Sous l'action d'efforts horizontaux, la lame se met à tourner autour d'un certain axe vertical dont la trace I *sur le plan* xOy *a pour coordonnées polaires* f *et* ω.

1° *Exprimer que la résultante des réactions de frottement du plan sur la lame est perpendiculaire à* OI. (*On désignera par* a, b, c *les longueurs* IA, IB, IC; *par* α, β, γ *les coefficients de frottement, supposés différents, aux trois points* A, B, C.)

2° *On suppose* $\alpha = \beta$, γ *étant rendu négligeable au moyen d'un lubrifiant. Former l'équation polaire du lieu des points* I *définis par la condition précédente. Étudier ce lieu.*

3° *Comment varie, avec la position du point* I, *le moment résultant des réactions de frottement par rapport à la verticale du point* I?

Composition d'Algèbre et Trigonométrie.

On considère la fonction θ *de* x *définie par la relation* $\operatorname{arc\,tang} x = \dfrac{x}{1+\theta x^2}$ *où le premier membre représente un arc compris entre* $-\dfrac{\pi}{2}$ *et* $+\dfrac{\pi}{2}$.

1° *Déterminer les valeurs limites de* θ *pour*

$$x = \pm\infty \quad \text{et} \quad x = 0.$$

2° *Suivre les variations de la fonction* $\theta(x)$ *quand* x *croît de* $-\infty$ *à* $+\infty$.

3° *Dans cette fonction* $\theta(x)$, *on remplace* x *par* n^p, n *étant un entier variable et* p *un nombre positif donné; on considère la série dont le terme de rang* n *a pour valeur* $\theta(n^p)$. *Pour quelles valeurs de* p *la série est-elle convergente?*

4° *Calculer* $\int_a^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\theta(x)\,dx$. *Étudier la variation de cette intégrale quand* a *augmente de* $-\infty$ *à* $+\infty$.

5° *Calculer, à l'approximation de la règle à calcul, la valeur numérique de*

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\theta(x)\,dx.$$

Composition de calcul.

1° *Calculer une table des valeurs de* 10^{-t^2} *pour des valeurs de* t *croissant de* 0 *à* 1 *par échelons de* 0,1.

2° *De cette première table en déduire une deuxième qui donne les valeurs approchées de l'intégrale*

$$u = \int_0^t 10^{-t^2}\,dt,$$

pour des valeurs de t *croissant de* 0 *à* 1 *par échelons de* 0,1.

3° *Comment et dans quelles limites la deuxième table peut-elle servir à étudier la fonction de la variable* x *définie par la formule*

$$y = \int_0^x e^{-x^2}\,dx^2 \qquad (e = 2,718\ldots)?$$

4° *En particulier, calculer la valeur de* x *qui correspond à*

$$y = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \qquad (\pi = 3,14\ldots).$$