R. BOUVAIST

Sur le problème d'Apollonius

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 446-451

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__446_0>

[K¹12bα]

SUR LE PROBLÈME D'APOLLONIUS;

PAR M. R. BOUVAIST,
Enseigne de vaisseau.

Laguerre a déduit une solution du problème d'Apollonius (*Mener un cercle tangent à trois cercles donnés*) de la proposition suivante : *Si trois cycles sont tels que leur axe de similitude ne coupe aucun d'eux, on peut, au moyen d'une transformation par semi-droites réciproques, les transformer en trois points.* De cette proposition on peut rapprocher celle-ci : *Étant donnés trois cercles, on peut, au moyen d'une transformation par rayons vecteurs réciproques, les transformer en trois cercles égaux.* Je me propose de montrer que cette dernière proposition peut, elle aussi, conduire à une solution du problème d'Appollonius.

1° DÉTERMINATION DES PÔLES D'INVERSION PERMETTANT DE TRANSFORMER TROIS CERCLES DONNÉS EN TROIS CERCLES ÉGAUX. — On sait que, pour que les inverses de deux cercles donnés par rapport à un point P soient égaux, il faut et il suffit que les puissances du point P par rapport à chacun de ces cercles soient respectivement proportionnelles au rayon de ces cercles. Comme, d'autre part, le lieu des points, tels que leurs puissances par rapport à deux cercles donnés soient dans un rapport donné, se compose de deux cercles ayant pour centres les points partageant la ligne des centres des deux cercles dans le rapport donné et passant par l'intersection des cercles considérés, nous sommes conduits au résultat suivant :

Étant donnés trois cercles C_1, C_2, C_3 *de rayons* R_1, R_2, R_3, *les pôles d'inversion par rapport auxquels* C_1, C_2, C_3 *se transforment en trois cercles égaux, sont les quatre couples de points intersections des cercles*

$$\frac{C_1}{R_1} = \frac{C_2}{R_2} = \frac{C_3}{R_3},$$

$$\frac{C_1}{-R_1} = \frac{C_2}{R_2} = \frac{C_3}{R_3},$$

$$\frac{C_1}{R_1} = \frac{C_2}{-R_2} = \frac{C_3}{R_3},$$

$$\frac{C_1}{R_1} = \frac{C_2}{R_2} = \frac{C_3}{-R_3};$$

ou encore, en désignant par S_{12}, S_{23}, S_{31}, S'_{12}, S'_{23}, S'_{31} les centres de similitude des trois cercles C_1, C_2, C_3 :

Les cercles ayant pour centre trois des centres de similitude situés sur un même axe de similitude, S_{12}, S_{23}, S_{31} *par exemple, en passant respectivement par l'intersection des cercles* $C_1 C_2$, $C_2 C_3$, $C_3 C_1$ *se coupent en deux points qui sont tels qu'en les prenant pour pôles d'inversion, les inverses des cercles* C_1, C_2, C_3 *sont égaux.*

2° Condition de réalité des pôles permettant de transformer trois cercles donnés en trois cercles égaux. — Soient, par exemple, P_1 et P_2 les deux pôles situés sur une perpendiculaire à l'axe de similitude S_{12}, S_{23}, S_{31}, et soit R le centre radical des cercles C_1, C_2, C_3; les points P_1 et P_2 sont déterminés par l'intersection des cercles

$$C_1 + \lambda C_3 = \Gamma_2, \qquad C_1 + \lambda C_2 = \Gamma_1;$$

le point R a même puissance d'une part par rapport aux cercles C_1, C_2, Γ_2, d'autre part par rapport aux cercles C_1, C_3, Γ_1 ; la droite $P_1 P_2$ passe donc par R, donc :

Les pôles permettant de transformer trois cercles C_1, C_2, C_3 *en trois cercles égaux forment quatre couples situés sur les perpendiculaires abaissées du centre radical de* C_1, C_2, C_3 *sur les axes de similitude de ces cercles.*

Nous avons de plus

$$RP_1 \times RP_2 = k^2$$

(k^2 étant le rayon du cercle orthotomique de C_1, C_2, C_3), ou, en désignant par I l'intersection de $P_1 P_2$ avec $S_{12} S_{23} S_{13}$,

$$RP_1 \times RP_2 = \overline{RI}^2 - \overline{IP}_1^2 = k^2,$$

les points de P_1 et P_2 seront donc réels si $\overline{RI}^2 > k^2$, c'est-à-dire si l'axe de similitude $S_{12} S_{23} S_{13}$ ne coupe pas le cercle orthotomique, donc :

On aura, sur la perpendiculaire abaissée du centre radical de R *de* C_1, C_2, C_3 *sur l'un des axes de similitude, deux pôles réels permettant de transformer* C_1, C_2, C_3 *en trois cercles égaux, si l'axe considéré ne coupe pas le cercle orthotomique de* C_1, C_2, C_3.

Remarque. — J'ai cru bon d'insister sur la détermination des pôles permettant de transformer trois cercles donnés en trois cercles égaux, car bien que l'existence de ces pôles soit un fait bien connu, les Traités classiques ne les signalent pas, me semble-t-il, avec toute la précision désirable. C'est ainsi qu'on peut lire dans le *Traité de Géométrie* de Rouché et de

Comberousse (t. I, p. 191) : « On peut, en général, trouver *un* centre d'inversion, tel que trois cercles donnés se transforment en trois cercles égaux. »

PROBLÈME D'APOLLONIUS. — Soient C_1, C_2, C_3 les trois cercles donnés, P un pôle d'inversion, permettant de transformer les trois cercles en trois cercles égaux; O_1, O_2, O_3 les centres de C_1, C_2, C_3.

Prenons comme puissance d'inversion la puissance de P par rapport à C_1, le centre C_1 se transforme en lui-même, C_2 et C_3 deviennent les cercles C'_2 et C'_3 de centres O'_2, O'_3.

Soit ω le centre du cercle circonscrit au triangle O, O'_2, O'_3. Cherchons les cercles tangents à C_1, C'_2, C'_3.

Nous avons immédiatement deux solutions, les deux cercles de centre ω et de rayons $\omega O_1 \pm R_1$ (R_1 étant le rayon commun de C_1, C'_2, C'_3). Soient Δ la perpendiculaire au milieu de OO'_2, M_1 et M_2 les points d'intersection de Δ avec l'hyperbole de foyers O'_2 et O'_3 ayant pour longueur d'axe focal $2R_1$.

Nous aurons

$$O'_3M_1 - O'_2M_1 = 2R_1 \qquad \text{ou} \qquad O'_3M_1 - R_1 = O'_2M_1 + R_1 = \rho_1,$$

ce qui montre que le cercle de centre M_1 et de rayon ρ_1 est tangent aux trois cercles C_1, C'_2, C'_3; nous aurons ainsi sur chacune des perpendiculaires élevées au milieu des côtés du triangle O, O'_2, O'_3, deux points centres de cercles tangents aux trois cercles C_1, C_2, C_3. Les points tels que M_1 et M_2 se déterminent par la construction classique; M_1 et M_2, par exemple, sont les centres des cercles passant par O'_2 et O_1 et tangents au cercle de centre O'_3 et de rayon $2R_1$.

Nous obtiendrons ainsi individuellement les huit solutions du problème et, en revenant à la figure primitive, les huit cercles tangents à C_1, C_2, C_3.

Remarque. — Considérons les deux cercles ayant pour centre commun le centre du cercle circonscrit au triangle O_1, O'_2, O'_3 ; ces deux cercles sont orthogonaux aux perpendiculaires élevées aux milieux des côtés du triangle O_1, O'_2, O'_3, qui sont les axes radicaux des cercles C_1, C'_2, C'_3 pris deux à deux ; en revenant à la figure primitive, nous voyons que les deux cercles Γ_1 et Γ_2 transformés de ces cercles sont orthogonaux aux cercles passant par P et les intersections des cercles C_1, C_2, C_3 pris deux à deux, c'est-à-dire orthogonaux au faisceau de cercles passant par les points P et P', P' étant le symétrique de P par rapport à l'axe de similitude de C_1, C_2, C_3 auquel la droite RP est perpendiculaire (R désignant comme plus haut le centre radical de C_1, C_2, C_3). Γ_1 et Γ_2 appartiennent donc au faisceau formé par les cercles ayant leurs centres sur RP et orthogonaux au cercle de diamètre PP'. Nous avons vu plus haut qu'on a

$$RP - RP' = k^2,$$

k étant le rayon du cercle orthotomique de C_1, C_2, C_3 ; cette relation montre que ce cercle orthotomique appartient au même faisceau que Γ_1 et Γ_2, d'où la proposition suivante :

Les cercles tangents à trois cercles donnés forment quatre groupes de deux cercles. Deux cercles formant un groupe appartiennent au faisceau de cercles déterminés par le cercle orthotomique des trois cercles donnés et l'un de leurs axes de similitude.

Cette proposition ramène donc le problème d'Apollonius à un problème tout à fait élémentaire : « Mener un cercle tangent à un cercle donné et passant par deux points donnés ».

Les propositions précédentes s'appliquent sans modification à un système de quatre sphères, et l'on peut dire que :

Les seize sphères tangentes à quatre sphères données forment huit groupes de deux sphères, deux sphères d'un même groupe appartiennent au faisceau déterminé par la sphère orthotomique des quatre sphères données et l'un de leurs huit plans de similitude.