R. GOORMAGHTIGH

Sur les ellipses tritangentes à l'hypocycloïde à trois rebroussements

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 442-445

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__442_0>

[M¹5b]

SUR LES ELLIPSES TRITANGENTES A L'HYPOCYCLOÏDE A TROIS REBROUSSEMENTS;

PAR M. R. GOORMAGHTIGH.

M. J. Lemaire a étudié (*Nouvelles Annales*, 1913, p. 126) les ellipses tritangentes à une hypocycloïde à trois rebroussements. Les développements suivants conduiront à d'autres propriétés des mêmes coniques.

1. Considérons, dans le plan d'un triangle ABC, un point P autour duquel pivote une droite m. Cette droite rencontre le cercle circonscrit au triangle en deux points dont les droites de Simson se coupent en un point M, orthopôle de m. Le point M décrit une conique Ω (¹).

En plaçant la droite m perpendiculairement et parallèlement aux côtés du triangle ABC, on verra aisément que la conique Ω passe par les projections de P sur les côtés du triangle et que le centre γ de cette conique est le milieu de la droite qui joint l'orthocentre H du triangle au point P.

Nous allons montrer que *la conique Ω est tritangente à l'hypocycloïde de Steiner du triangle* ABC.

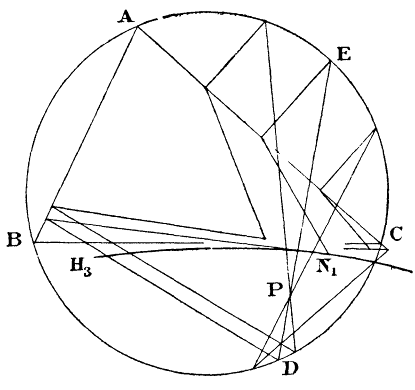
Soient, en effet, R_1, R_2, R_3 les points de rebroussements de cette hypocycloïde H_3. Prenons sur l'arc R_2R_3 un point N_1; la tangente à H_3 en ce point est la droite de Simson, par rapport au triangle ABC, d'un point D

(¹) *Voir*, par exemple, J. NEUBERG, *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, juillet-août 1910.

du cercle ABC. La tangente adjointe est la droite de Simson d'un point E.

Prenons de même sur l'arc $R_1 R_3$ un point N_2; la tangente à H_3 en ce point et la tangente adjointe sont les droites de Simson des points F et K. Soit P le point d'intersection des cordes DE, FK; les points N_1 et N_2 sont des points de la conique Ω relative au point P. Dès lors, si l'on considère, de part et d'autre de DE, une corde voisine, on voit (*fig.* 1) que les points de la

Fig. 1.



conique Ω correspondant à ces cordes sont nécessairement situés du même côté de l'arc $R_2 R_3$. Les points N_1, N_2 sont donc des points de contact de l'hypocycloïde avec Ω; par suite, en vertu d'un théorème connu, la conique Ω est tangente à H_3 en un troisième point.

2. Ceci posé, considérons une H_3 et la série de ses triangles T qui admettent H_3 comme hypocycloïde de Steiner.

Une ellipse, de centre donné γ, tritangente à H_3, touche H_3 en N_1, N_2, N_3; on sait que les normales en ces points sont concourantes. Les propriétés qui précèdent permettent de généraliser ce théorème. Soit, en effet, un triangle T quelconque; le symétrique de son orthocentre H par rapport à γ est tel que ses projections sur les côtés du triangle T appartiennent à Ω; d'où le théorème :

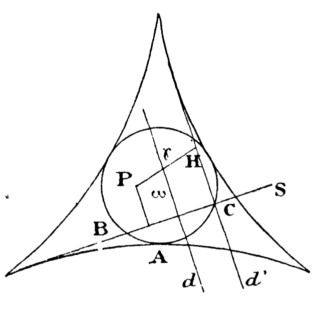
Une ellipse tritangente coupe les côtés d'un triangle T *quelconque en six points dont trois sont tels que les perpendiculaires élevées en ces points sur les côtés du triangle* T *concourent en un même point.*

Ce point de rencontre est le symétrique de l'orthocentre du triangle T par rapport au centre de la conique tritangente.

On sait que le triangle formé par les tangentes à H_3 en N_1, N_2, N_3 est un triangle T; on voit donc que les normales à H_3 en ces points sont concourantes.

3. Supposons maintenant que le centre γ d'une

Fig. 2.



ellipse tritangente à une H_3 se déplace sur une droite d (*fig.* 2). Considérons la tangente d' à H_3 parallèle à d, et la tangente s perpendiculaire à d. Il existe une infinité de triangles T dont d' est une hauteur; tous ces triangles ont un côté commun s. Le symétrique de l'orthocentre du triangle T par rapport à γ décrit une parallèle à d. Par conséquent, la projection de ce point sur le côté s des triangles T considérés est un point fixe.

On arrive ainsi au théorème suivant :

Lorsque le centre d'une ellipse tritangente à une H_3 *décrit une droite, cette ellipse passe par un point fixe.*

Ce point fixe appartient à la tangente à l'hypocycloïde perpendiculaire à la droite considérée.

4. Les propriétés énoncées au paragraphe 1 conduisent encore à une construction simple des ellipses tritangentes à une hypocycloïde à trois rebroussements.

Reprenons la définition fondamentale de l'hypocycloïde : soient (*fig.* 2), sur un cercle fixe ω, un point fixe A et deux points mobiles B et C tels que

$$\text{arc}\, AC = 2\, \text{arc}\, AB.$$

Si l'on observe que C est la projection sur BC de l'orthocentre de l'un quelconque des triangles T dont un des côtés coïncide, en alignement, avec BC, on peut dire que l'*ellipse de centre donné* γ *tritangente à* H_3 *est le lieu du symétrique de* C *par rapport à la projection de* γ *sur* BC.

Cette propriété permet de tracer, en même temps, une hypocycloïde à trois rebroussements et l'ellipse de centre donné qui lui est tritangente.