NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

F. GOMÈS TEIXEIRA

Sur les roulettes circulaires

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 438-441

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__438_1>

[$O^1 2p$]

SUR LES ROULETTES CIRCULAIRES;

PAR M. F. GOMES TEIXEIRA.

1. Le problème qui a pour objet de déterminer la courbe sur laquelle doit rouler une autre courbe donnée pour qu'un point du plan de la seconde courbe décrive une droite a été résolu complètement par M. Haton de la Goupillière dans le Mémoire remarquable qu'il a consacré à la théorie des roulettes. Mais je crois qu'on n'a pas encore considéré ce problème analogue :

Déterminer la courbe C_2 *sur laquelle doit rouler une autre* C_1 *pour que la roulette décrite par un point du plan de celle-ci soit une circonférence.*

Je vais donc m'occuper de cette question.

Rapportons la courbe roulante à un système de coordonnées (θ, ρ) polaires ayant pour pôle le point décrivant M et la courbe fixe ainsi que la roulette à un autre système de coordonnées polaires (ρ_1, θ_1) ayant pour pôle le centre du cercle donné.

En appliquant le théorème de Descartes sur les normales aux roulettes, on trouve évidemment

$$\rho_1 = \rho + a,$$

a désignant le rayon du cercle et ρ et ρ_1 les distances respectives du point décrivant M et du centre du cercle au point de contact N de C_1 et C_2 On a aussi, par la condition de roulement,

$$d\rho^2 + \rho^2\, d\theta^2 = d\rho_1^2 + \rho_1^2\, d\theta_1^2,$$

et par conséquent

$$(\rho_1 - a)^2\, d\theta^2 = \rho_1^2\, d\theta_1^2.$$

Donc, en supposant que l'équation de la courbe roulante est

$$\theta = f(\rho), \tag{1}$$

on voit que la courbe fixe doit vérifier l'équation différentielle

$$d\theta_1 = \frac{\rho_1 - a}{\rho_1} f'(\rho_1 - a)\, d\rho_1. \tag{2}$$

Réciproquement, la courbe (1) peut rouler sur une courbe définie par l'équation (2) de manière que le pôle de la première décrive une circonférence.

Nous avons, en effet, par la condition de roulement, la relation

$$d\rho^2 + \rho^2 f'^2(\rho)\, d\rho^2 = d\rho_1^2 + (\rho_1 - a)^2 f'^2(\rho_1 - a)\, d\rho_1^2,$$

à laquelle on satisfait évidemment en faisant $\rho = \rho_1 - a$.

On a aussi, à cause du théorème de Descartes,

$$(3) \qquad \begin{aligned} (X - x)^2 + (Y - y)^2 &= (\rho_1 - a)^2, \\ (X - x)\, dx + (Y - y)\, dy &= 0, \end{aligned}$$

X, Y étant les coordonnées cartésiennes du point décrivant et x, y celles du point de contact des courbes C_1 et C_2, rapportées au centre du cercle, comme origine; et, en différentiant la première équation et en tenant compte de la deuxième, on trouve

$$(X - x)\,dx + (Y - y)\,dy = -(\rho_1 - a)\,d\rho_1. \tag{4}$$

Nous allons maintenant montrer que les valeurs de X et Y, qui vérifient cette équation et l'équation (3), vérifient aussi celle-ci :

$$X^2 + Y^2 = a^2.$$

Pour cela, remarquons que, en vertu de cette équation, l'équation (3) devient

$$xX + yY = a\rho_1, \tag{5}$$

et que, en posant $x = \rho_1 \cos\theta_1$, $y = \rho_1 \sin\theta_1$ et en tenant compte de (2), on a

$$dx = [\cos\theta_1 - (\rho_1 - a)f'(\rho_1 - a)\sin\theta_1]\,d\rho_1,$$
$$dy = [\sin\theta_1 + (\rho_1 - a)f'(\rho_1 - a)\cos\theta_1]\,d\rho_1,$$

et par conséquent

$$x\,dx + y\,dy = \rho_1\,d\rho_1,$$
$$x\,dy - y\,dx = \rho_1(\rho_1 - a)f'(\rho_1 - a)\,d\rho_1.$$

Les équations (4) et (5) donnent donc

$$X = \frac{a\rho_1\,dy - y[(x\,dx + y\,dy) - (\rho_1 - a)\,d\rho_1]}{x\,dy - y\,dx} = a\cos\theta_1,$$
$$Y = \frac{x[x\,dy + y\,dx - (\rho_1 - a)\,d\rho_1] - a\rho_1\,dx}{x\,dy - y\,dx} = a\sin\theta_1.$$

Or ces valeurs de X et Y vérifient l'équation

$$X^2 + Y^2 = a^2,$$

et le théorème est démontré.

2. Pour faire une première application de cette doctrine, nous allons considérer le cas où la ligne roulante se réduit à une droite représentée par l'équation

$$\rho = \frac{h}{\cos\theta}.$$

L'équation (2) donne alors

$$\theta_1 = h \int \frac{d\rho_1}{\rho_1\sqrt{(\rho_1 - a)^2 - h^2}},$$

résultat identique à celui qui a été obtenu par M. Kœnigs dans ses *Leçons de Cinématique* (1897, p. 170).

Nous ajouterons que cette équation est identique à celle que nous avons obtenue en complétant la solution d'un problème de Descartes dans le Tome II, page 243, de notre *Traité des courbes spéciales*.

3. Considérons encore le cas où la courbe roulante est une circonférence et le point décrivant un point de cette circonférence.

L'équation polaire de cette ligne rapportée à un de ses points, comme pôle, est

$$\rho = h\cos\theta,$$

et, par conséquent, en appliquant la formule (2), on voit que l'équation de la base de la roulette est

$$\theta_1 = \int \frac{(\rho_1 - a)\, d\rho_1}{\rho_1\sqrt{h^2 - (\rho_1 - a)^2}}.$$

La classe de courbes définie par cette équation est identique à une classe de courbes rencontrée par Euler dans ses recherches sur les lignes rectifiables par des arcs de cercle dans le Tome XI des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg* (*voir* notre *Traité de courbes spéciales*, t. II, p. 292).