Nouvelles annales de mathématiques

Michel Petrovitch

Courbes découpant sur une droite fixe les longueurs représentant la suite indéfinie des nombres premiers

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 406-409

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__406_1>

[19b, M^4m]

COURBES DÉCOUPANT SUR UNE DROITE FIXE LES LONGUEURS REPRÉSENTANT LA SUITE INDÉFINIE DES NOMBRES PREMIERS;

PAR M. MICHEL PETROVITCH.

1. On peut, de la manière suivante, former des classes étendues de courbes planes C douées de la propriété remarquable de rencontrer une droite fixe (que nous prendrons pour l'axe des x) aux points *dont les abscisses forment la suite indéfinie de nombres premiers positifs*.

Soit $\theta\,(x, u)$ une fonction réelle de deux variables x et u, ne s'annulant pour aucune paire de valeurs réelles fractionnaires (x, u) et s'annulant pour toute paire de valeurs entières de ces variables.

Telle serait, par exemple, la fonction

$$a \cos 2\varpi x + b \cos 2\varpi u - (a + b)$$

ou bien la fonction

$$a \sin^m \varpi x + b \sin^m \varpi u$$

(m étant un entier pair positif, a et b deux constantes positives); et, plus généralement, la fonction

$$\varphi_1(\sin \varpi x) + \varphi_2(\sin \varpi u),$$

où $\varphi_1(z)$ et $\varphi_2(z)$ sont deux fonctions réelles, paires, positives, s'annulant pour $z = 0$. D'ailleurs une puissance positive quelconque d'une fonction $\theta(x, u)$ est également une fonction $\theta(x, u)$.

Soit $\Phi(x)$ l'une quelconque parmi les fonctions obtenues en remplaçant dans une fonction $\theta(x, u)$ la variable u par la fonction

$$u = \frac{1 + \Gamma(x)}{x}. \tag{1}$$

D'après le théorème arithmétique de Waring-Wilson, complété par Lagrange, et les propriétés élémentaires de la fonction $\Gamma(x)$, pour que l'expression (1), x étant un *entier*, ait également une valeur *entière*, il faut et il suffit que x soit un nombre *premier* positif.

Toute courbe

$$y = \Phi(x) \tag{2}$$

est donc une courbe C.

Ainsi la courbe

$$y = (a + b) - a \cos 2\varpi x - b \cos 2\varpi u.$$

présente un nombre illimité d'oscillations à droite de l'axe des y et au-dessus l'axe des x, d'amplitudes variables inférieures à 2 $(a+b)$, *touchant* l'axe des x aux points dont les abscisses sont les nombres premiers; tout point de l'axe des x, ayant pour abscisse un nombre premier positif, est un point de contact de la courbe et de cet axe.

La courbe

$$y^2 = (a+b) - a\cos 2\varpi x - b\cos 2\varpi u$$

coupe, en oscillant, l'axe des x aux points dont les abscisses forment la suite indéfinie des nombres premiers positifs.

2. Nous signalerons une question qui se présente dans ce même ordre d'idées et qui, résolue dans le sens affirmatif, ne serait pas dénuée d'un certain intérêt arithmétique.

Il existe des fonctions telles qu'elles-mêmes et leurs dérivées secondes soient réelles, finies et continues pour les valeurs positives de x, ayant la suite indéfinie de nombres *entiers* positifs comme zéros *simples*, sans s'annuler pour aucune autre valeur positive de x. Telle serait, par exemple, la fonction élémentaire $\sin\varpi x$.

Peut-on construire une fonction $\Phi(x)$ telle qu'elle-même et sa dérivée seconde soient réelles, finies et continues pour les valeurs positives de x et qu'elles aient la suite indéfinie des nombres premiers positifs comme zéros simples, sans s'annuler pour aucune autre valeur positive de x^2 ?

Une telle fonction Φ étant supposée construite, l'expression

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{dx^2} \tag{3}$$

serait réelle, finie, continue et différente de zéro pour toute valeur positive de x. De plus, elle serait nécessairement *négative* pour x variant de 0 à ∞, car s'il n'en était pas ainsi, comme elle ne changerait pas de signe dans cet intervalle, elle y serait constamment positive et, d'après le théorème connu sur les équations linéaires du second ordre, la fonction Φ aurait au plus un zéro simple positif, ce qui n'est pas le cas.

La courbe (2), représentant une telle fonction Φ, aurait pour x positif une allure sinusoïdale, tournant constamment sa concavité vers l'axe des x et coupant cet axe (sans jamais le toucher) aux points dont les abscisses seraient les nombres premiers; c'est en ces points que l'ordonnée de la courbe et sa concavité changeraient à la fois de sens et ce seraient les seuls points d'inflexion de la courbe.

En désignant alors par $-$ M *et* $-$ N *une limite inférieure et une limite supérieure de l'expression* (3), *le nombre de nombres premiers, compris dans un intervalle positif donné* (a, b), *serait compris entre les valeurs*

$$\frac{(b-a)\sqrt{\mathrm{N}}}{\varpi} \quad \text{et} \quad \frac{(b-a)\sqrt{\mathrm{M}}}{\varpi} + 2.$$

D'après ce qu'on sait sur les zéros simples des intégrales oscillantes des équations linéaires du second ordre [1], il y aurait même moyen de resserrer notablement ces limites.

---

[1] *Voir* par exemple ma Communication : *Fonctions implicites oscillantes* (*Proceedings of the fifth Congress of mathematicians, Cambridge*, 1912).