V. JAMET

Sur les réseaux conjugués

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 388-394
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__388_0>

[O'7a]

SUR LES RÉSEAUX CONJUGUÉS;

PAR M. V. JAMET.

1. Comme suite à mon précédent article, je signalerai les surfaces sur lesquelles toutes les courbes d'un même réseau conjugué sont dans des plans tangents à un même cylindre du deuxième ordre.

On prendra pour plan des xy le plan d'une section droite, et l'on observera que toute tangente à cette section est représentée par une équation de la forme

$$Z\alpha^2 - Y\alpha + X = 0, \tag{1}$$

où α désigne une constante, X, Y, Z étant des fonctions linéaires et homogènes des trois coordonnées homogènes x, y, u. Par chaque point du plan des xy passe une droite représentée par l'équation (1) et une deuxième droite représentée par l'équation

$$Z\beta^2 - Y\beta + X = 0. \tag{2}$$

L'équation aux dérivées partielles que nous voulons former doit admettre pour intégrales les trois fonctions X, Y, Z de α et de β, ou trois fonctions qui leur soient proportionnelles, savoir

$$\alpha\beta, \quad \alpha + \beta, \quad 1;$$

et comme elle est de la forme

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} + A\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} + B\frac{\partial\theta}{\partial\beta} + C\theta = 0,$$

on en conclut qu'elle se réduit à

$$(3) \qquad (\alpha-\beta)\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}-\frac{\partial\theta}{\partial\beta}=0.$$

Si son intégrale générale est désignée par θ, la cote z d'un point de la surface cherchée sera égale à $\frac{\theta}{u}$.

Voici comment on obtient cette intégrale générale. D'abord on trouve, par deux différentiations successives,

$$\frac{\partial^4\theta}{\partial\alpha^2\,\partial\beta^2}=0$$

et par conséquent

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta}=f''(\alpha)+\varphi''(\beta),$$

f et φ désignant deux fonctions arbitraires. On en déduit

$$\theta=\beta f'(\alpha)+\alpha\varphi'(\beta)+f_1(\alpha)+\varphi_1(\beta),$$

f_1, φ_1 désignant deux fonctions qu'il s'agit de déterminer en tenant compte de l'équation (3). Or on trouve, en vertu de cette relation,

$$-\alpha f''(\alpha)-\beta\varphi''(\beta)+f'(\alpha)-\varphi'(\beta)-f_1'(\alpha)+\varphi_1'(\beta)=0,$$

ou bien

$$\beta\varphi''(\beta)+\varphi'(\beta)+\varphi_1'(\beta)=\alpha f''(\alpha)-f'(\alpha)+f_1'(\alpha),$$

et ceci ne peut avoir lieu que si les deux membres de cette égalité sont égaux à une même constante. Soit donc

$$\alpha f''(\alpha)-f'(\alpha)+f_1'(\alpha)=a.$$

On trouve, en intégrant,

$$\alpha f'(\alpha)-2f(\alpha)+f_1(\alpha)=a\alpha+c;$$

et de même

$$\beta\varphi'(\beta) - 2\varphi(\beta) + \varphi_1(\beta) = a\beta + c',$$

puis

$$(4)\qquad \begin{aligned}\theta = {} & (\beta-\alpha)f'(\alpha) + 2f(\alpha)\\ & + (\alpha-\beta)\varphi'(\beta) + 2\varphi(\beta) + a(\alpha+\beta) + b,\end{aligned}$$

b désignant la somme des deux constantes arbitraires c, c'; et le problème actuel se résout par cette dernière formule.

2. Dans l'étude des surfaces que nous venons de définir, la recherche des lignes asymptotiques se ramène aux quadratures. En effet, une telle surface est une transformée homographique de celle qu'on définirait en prenant pour coordonnées homogènes x, y, z, u d'un point courant, les fonctions

$$\alpha\beta, \quad \alpha+\beta, \quad \theta, \quad 1,$$

en désignant par θ le second membre de la formule (4); mais alors l'équation différentielle des lignes asymptotiques

$$\begin{vmatrix} d^2x & d^2y & d^2z & d^2u \\ x & y & z & u \\ \dfrac{\partial x}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial y}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial z}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial u}{\partial\alpha} \\ \dfrac{\partial x}{\partial\beta} & \dfrac{\partial y}{\partial\beta} & \dfrac{\partial z}{\partial\beta} & \dfrac{\partial u}{\partial\beta} \end{vmatrix} = 0$$

se réduit à

$$f'''(\alpha)\,d\alpha^2 + \varphi'''(\beta)\,d\beta^2 = 0,$$

comme on le voit en faisant subir au déterminant ci-dessus toute une suite de transformations faciles. Les lecteurs désireux d'appliquer à notre problème les propriétés fondamentales des fonctions elliptiques reconnaîtront que cela est possible dans le cas où l'on a, par exemple,

$$f(\alpha) = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{(\alpha - t)^2}{F(t)} dt, \qquad \varphi(\beta) = -\int_{\beta_0}^{\beta} \frac{(\beta - u)^2 du}{F(u)},$$

en désignant par F un polynome du troisième ou du quatrième degré.

3. Un autre cas particulier du problème traité dans le précédent article est celui où le réseau plan donné est constitué par deux faisceaux linéaires de droites. Ce cas est tellement simple que nous n'y insisterions pas s'il ne se rattachait au problème suivant : *Trouver une surface sur laquelle il y ait un réseau conjugué formé de deux faisceaux de courbes planes, dont les plans ont en commun, pour chaque faisceau, une même droite fixe.*

Le cas particulier précité est celui où les deux droites sont parallèles; on y ramène, par voie d'homographie, le cas où les deux droites se coupent.

Quant au cas général, je l'ai traité, puis-je dire, sans m'en douter, dans un Mémoire inséré aux *Annales de l'École Normale* (Supplément de 1887), où j'ai résolu le problème suivant : *Trouver une surface telle que ses sections par les plans passant par une droite donnée soient les courbes de contact de la surface avec des cônes dont le sommet est situé sans cesse sur une autre droite donnée.* En effet, d'après une proposition de M. Kœnigs, que je ne connaissais pas à cette époque, les courbes conjuguées des sections faites sur une surface par un plan passant par une droite Δ, sont les courbes de contact de la surface avec les surfaces coniques dont le sommet est situé sur Δ. Donc, si Δ et Δ' sont les deux droites dont il est question dans le premier de nos deux énoncés, les courbes conjuguées des sections planes dont le plan passe par Δ' sont les sections planes dont le plan passe par Δ, et les deux problèmes se transforment l'un dans l'autre; or, le deuxième donne lieu à une intégration qui m'a paru intéressante. En effet, si les équations de Δ sont $X = 0$, $Y = 0$, et si les équations de Δ' sont $Z = 0$, $U = 0$, l'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial\alpha\,\partial\beta} & \frac{\partial^2 Y}{\partial\alpha\,\partial\beta} & \frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\,\partial\beta} & \frac{\partial^2 U}{\partial\alpha\,\partial\beta} \\ X & Y & Z & U \\ \frac{\partial X}{\partial\alpha} & \frac{\partial Y}{\partial\alpha} & \frac{\partial Z}{\partial\alpha} & \frac{\partial U}{\partial\alpha} \\ \frac{\partial X}{\partial\beta} & \frac{\partial Y}{\partial\beta} & \frac{\partial Z}{\partial\beta} & \frac{\partial U}{\partial\beta} \end{vmatrix} = 0$$

exprimant la condition pour que les deux faisceaux de courbes α, β soient conjugués, doit être vérifiée si l'on y fait $Y = \alpha X$, $U = \beta Z$, et l'on doit trouver

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial\alpha\,\partial\beta} & \alpha\frac{\partial^2 X}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{\partial X}{\partial\beta} & \frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\,\partial\beta} & \beta\frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{\partial Z}{\partial\alpha} \\ X & \alpha X & Z & \beta Z \\ \frac{\partial X}{\partial\alpha} & \alpha\frac{\partial X}{\partial\alpha} + X & \frac{\partial Z}{\partial\alpha} & \beta\frac{\partial Z}{\partial\alpha} \\ \frac{\partial X}{\partial\beta} & \alpha\frac{\partial X}{\partial\beta} & \frac{\partial Z}{\partial\beta} & \beta\frac{\partial Z}{\partial\beta} + Z \end{vmatrix} = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial\alpha\,\partial\beta} & \frac{\partial X}{\partial\beta} & \frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\,\partial\beta} & \frac{\partial Z}{\partial\alpha} \\ X & 0 & Z & 0 \\ \frac{\partial X}{\partial\alpha} & X & \frac{\partial Z}{\partial\alpha} & 0 \\ \frac{\partial X}{\partial\beta} & 0 & \frac{\partial Z}{\partial\beta} & Z \end{vmatrix} = 0.$$

Donc, on doit trouver trois fonctions A, B, C remplissant les conditions suivantes :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial\alpha\,\partial\beta} + A\frac{\partial X}{\partial\alpha} + B\frac{\partial X}{\partial\beta} + CX = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial X}{\partial\beta} + AX = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\,\partial\beta} + A\frac{\partial Z}{\partial\alpha} + B\frac{\partial Z}{\partial\beta} + CZ = 0,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial\alpha} + BZ = 0.$$

On écrit la première de ces relations sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial X}{\partial\beta} + AX\right) + B\frac{\partial X}{\partial\beta} + \left(C - \frac{\partial A}{\partial\alpha}\right)X = 0,$$

et, en la comparant avec la deuxième, on trouve

$$\frac{\partial A}{\partial\alpha} = C - AB.$$

On trouverait de même

$$\frac{\partial B}{\partial\beta} = C - AB.$$

On en déduit

$$\frac{\partial A}{\partial\alpha} = \frac{\partial B}{\partial\beta};$$

par suite, il existe une fonction D telle que l'on a

$$\left\{\begin{aligned} &A = \frac{\partial \log D}{\partial\beta}, \qquad B = \frac{\partial \log D}{\partial\alpha}, \\ &C = \frac{\partial^2 \log D}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{1}{D^2}\frac{\partial D}{\partial\alpha}\frac{\partial D}{\partial\beta} = \frac{1}{D}\frac{\partial^2 D}{\partial\alpha\,\partial\beta}. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

En vertu des relations (7), l'équation (6) devient

$$\frac{\partial(DX)}{\partial\beta} = 0.$$

On tire de là

$$DX = f(\alpha),$$

et ceci concorde avec l'équation (5), qui devient, en vertu de (7),

$$\frac{\partial^2 (DX)}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0.$$

On trouve de même

$$DZ = \varphi(\beta),$$

et l'on en conclut

$$\frac{X}{Z} = \frac{f(\alpha)}{\varphi(\beta)},$$

ou bien

$$\frac{X}{Z} = \frac{f\left(\frac{Y}{X}\right)}{\varphi\left(\frac{Z}{U}\right)},$$

ou encore

$$\frac{1}{X} f\left(\frac{Y}{X}\right) = \frac{1}{Z} \varphi\left(\frac{Z}{U}\right),$$

résultat conforme à celui que j'avais signalé dans le Mémoire précité.