E. LANDAU

Sur les conditions de divisibilité d'un produit de factorielles par un autre (supplément)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 353-355
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__353_1>

[I2e]

SUR LES CONDITIONS DE DIVISIBILITÉ D'UN PRODUIT DE FACTORIELLES PAR UN AUTRE (SUPPLÉMENT);

Par M. E. LANDAU, à Göttingen.

Dans le Tome XIX (1900) de la 3[e] série de ce Recueil (p. 344-362 et 576), j'ai publié un Mémoire sous ce titre. Son résultat principal est le théorème du n° IV, cité seul dans mon résumé au Tome XXXI du *Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik* (p. 183-184) et dans les Traités sur la *Théorie des nombres* par Kronecker-Hensel (t. I, p. 500-501) et Bachmann (*Niedere Zahlentheorie*, t. I, p. 64). Je n'ai rien à ajouter concernant ce théorème. Mais tout récemment MM. Hurwitz et Pólya ont remarqué indépendamment que la démonstration du théorème à la fin du n° III (qui n'est pas appliqué dans la suite ni dans aucun de mes travaux ultérieurs) contient une inexactitude. Elle est cependant, comme M. Pólya me l'a communiqué bientôt après, facile à rectifier, de sorte que le théorème même du n° III est juste.

Étant données (1) q formes linéaires à coefficients

(1) Je numérote ici consécutivement les

$$u_\sigma \quad (1 \leqq \sigma \leqq m) \qquad \text{et} \qquad v_\tau \quad (1 \leqq \tau \leqq n)$$

du n° III.

entiers avec r variables x_i $(i = 1, \ldots, r)$

$$L_\nu(x) = \gamma_{\nu 1} x_1 + \ldots + \gamma_{\nu r} x_r \qquad (\nu = 1, \ldots, q),$$

il s'agit de démontrer ceci : Soit donné un système de valeurs réelles $z_1, \ldots, z_r$ telles que les $L_\nu(z)$ sont tous $\geqq 0$; on peut trouver pour les variables des valeurs commensurables $y_1, \ldots, y_r$ telles que

$$(1) \quad [L_1(y)] = [L_1(z)], \qquad \ldots, \qquad [L_q(y)] = [L_q(z)].$$

La preuve indiquée pour ceci à l'endroit cité est incorrecte ; voici le raisonnement correct de M. Pólya :

On peut supposer qu'aucune des formes $L_\nu(x)$ ne soit identiquement nulle.

1. Si aucun des q nombres $L_\nu(z)$ n'est entier, l'assertion est évidente, puisque des changements suffisamment petits des x n'altèrent pas, dans ce cas, les nombres $[L_\nu]$.

2. S'il y a $s \geqq 1$ entiers parmi les $L_\nu(z)$, supposons, ce qui est permis, que $L_1(z), L_2(z), \ldots, L_s(z)$ $(1 \leqq s \leqq q)$ soient entiers, que les formes $L_1(x), L_2(x), \ldots, L_t(x)$ $(1 \leqq t \leqq s)$ soient indépendantes, tandis que, pour $t < s$, les formes $L_{t+1}(x), \ldots, L_s(x)$ en dépendent. Soit w le nombre des variables dont $L_1, \ldots, L_t$ (ou, ce qui revient au même, $L_1, \ldots, L_s$) dépendent *effectivement*.

a. Si $w = t$, les valeurs des w variables sont rationnelles; on conserve ces valeurs pour le nouveau système (y). Pourvu qu'on donne, pour $w < r$, aux $r - w$ variables restantes des valeurs rationnelles y_i suffisamment rapprochées des anciennes valeurs z_i, (1) est satisfait.

b. Si $w > t$, on peut donner à certaines $r - t$ variables des valeurs nouvelles et rationnelles s'écartant si peu des anciennes valeurs qu'en calculant les t autres variables au moyen des t équations linéaires

$$L_1(y) = L_1(z), \qquad \ldots, \qquad L_t(y) = L_t(z),$$

(1) est satisfait; tous les y seront rationnels.