Nouvelles annales de mathématiques

Certifcats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 326-336

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__326_1>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Marseille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Trouver le mouvement d'un corps solide de révoluiton pesant et homogène dont un point* O *de l'axe est fixe et dont l'ellipsoïde d'inertie relatif à ce point est la sphère*

$$A(x^2 + y^2 + z^2) = 1.$$

A l'origine des temps, l'axe de révolution est horizontal; la rotation instantanée est égale à $\alpha\sqrt{2}$ en désignant par α la quantité $\frac{2Mga}{A}$, où M désigne la masse du corps, g l'accélération de la pesanteur et a la distance du point fixe au centre de gravité; enfin l'axe de cette rotation instantanée est orienté suivant la bissectrice de l'angle que font la verticale du point fixe dirigée vers le haut et l'axe de révolution dirigé du point fixe vers le centre de gravité du corps.

Nota. — *Avec les notations ordinaires, les données initiales se traduisent par*

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad \theta'_0 = 0, \qquad \varphi'_0 = \psi'_0 = \alpha.$$

SOLUTION.

Les axes fixes sont la verticale OZ et deux axes OX, OY. Les axes mobiles sont l'axe de révolution Oz à une époque t et deux axes Ox et Oy liés au corps. La figure dépend des angles ψ (OX et OA intersection des deux plans des xy), φ (OA et Ox) et θ (OZ et Oz).

La somme des moments des forces est nulle par rapport à OZ et à Oz, donc la somme des moments des quantités de mouvement est constante. On a

$$A(p \sin\varphi \sin\theta + q \cos\varphi \sin\theta + z\cos\theta) = \text{const.},$$
$$Az = \text{const.}$$

D'ailleurs on a

$$\psi' + \varphi' \cos\theta = \alpha,$$
$$\varphi' + \psi' \cos\theta = \alpha,$$

d'où

$$\varphi' = \psi' = \frac{\alpha}{1 + \cos\theta}.$$

Le théorème des forces vives donne

$$A(p^2 + q^2 + r^2) = -2Mga\cos\theta + \text{const.}$$

ou

$$\psi'^2 + \varphi'^2 + \theta'^2 + 2\varphi'\psi'\cos\theta = -2\mathrm{M}ga\cos\theta + \text{const.},$$

et comme

$$\varphi' = \psi' \qquad \text{et} \qquad 2\psi'^2(1+\cos\theta) + \theta'^2 = \alpha^2(2-\cos\theta),$$

on arrive à

$$\theta'^2 = \frac{\cos\theta(1-\cos\theta)}{1+\cos\theta}.$$

Or pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, θ est négatif. Donc puisque $\theta'_0 = 0$, θ' est ensuite négatif et θ va en décroissant indéfiniment. On peut intégrer et l'on a

$$\sqrt{\cos\theta} = \frac{e^{\alpha t}-1}{e^{\alpha t}+1},$$

$$2\varphi = 2\psi = \alpha t + 2 \operatorname{arc\,tang} t.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On donne dans un plan horizontal quatre points fixes placés aux sommets d'un carré de* 2^{m} *de côté.*

A ces points fixes on attache des fils de fer qui sont réunis par leurs extrémités en un point auquel on suspend un poids P *de* 1000^{kg}.

Les fils ont la même longueur, 3^{m}, *mais leurs sections sont inégales et sont successivement entre elles comme les nombres* 1, 2, 3, 4.

Les fils s'allongent proportionnellement à leur tension et en raison inverse de leur section.

Le fil le plus faible s'allonge du millième de sa longueur sous une tension de 100^{kg}.

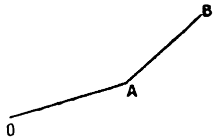
Calculer les tensions des fils.

Vérifier par le dessin que la résultante des tensions est bien égale au poids P.

Réponse : *Les tensions sont égales respectivement à* 204^{kg}, 363^{kg}, 204^{kg}, 363^{kg}. (Juin 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Dans un plan horizontal une barre rectiligne et homogène* OA *est mobile autour de son extrémité* O *qui est fixe. Au point* A *est articulée une barre* AB *identique à* OA.

Tous les points de ce système sont repoussés par le point O *proportionnellement à leur masse et à leur distance au point* O. *Primitivement le système est sans vitesse et la barre* AB *est perpendiculaire sur* OA.



On demande de calculer l'amplitude de l'oscillation de OA.

SOLUTION.

Soit θ l'angle de OA avec une droite fixe et soit φ l'angle de OA prolongée avec AB, on a par les aires

$$(10 + 6\cos\varphi)\theta' + (2 + 3\cos\varphi)\varphi' = 0,$$

par les forces vives

$$(10 + 6\cos\varphi)\theta'^2 + (2 + 3\cos\varphi)2\theta'\varphi' + 2\varphi'^2 = 2k^2\cos\varphi.$$

En éliminant θ' on a

$$(7 + 9\sin^2\varphi)\varphi'^2 = 6k^2(10 + 6\cos\varphi)\cos\varphi.$$

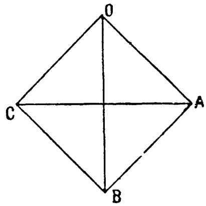
Donc φ varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$ et par suite l'amplitude de θ est

$$\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{2 + 3\cos\varphi}{10 + 6\cos\varphi}\,d\varphi;$$

on a en degrés

$$\theta = 50^\circ 9'.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un système articulé est formé de six tiges qui constituent les quatre côtés et les deux diagonales d'un carré. Ces six tiges sont tirées du même métal et ont la même section. On suppose qu'elles* *s'allongent ou se raccourcissent proportionnellement à leur longueur et à la charge qu'elles subissent.*



On suspend le système par l'un de ses sommets et l'on attache au sommet opposé un poids de 1000^{kg}. *Trouver les tensions des six tiges.*

SOLUTION.

On trouve :

$$\text{tension de OA} = 205^{kg} \text{ (extension)},$$
$$\text{tension de AC} = -\ 289^{kg} \text{ (compression)},$$
$$\text{tension de OB} = 711^{kg} \text{ (extension)}.$$

(Novembre 1911.)

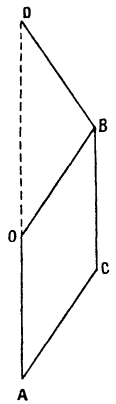
Poitiers.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une plaque rectangulaire homogène mince* OACB *est articulée en un sommet* B *à une barre* BD (*de masse négligeable vis-à-vis de celle de la plaque*).

Les points O, D *sont fixes sur une verticale. Les liaisons en* O, B, D *n'entraînent aucun frottement appréciable.*

1° *On demande d'écrire les équations différentielles du mouvement* (*en prenant comme paramètres : l'angle* α *du plan* OBD *avec un plan vertical fixe et l'angle* β *de la plaque avec le plan* OBD). *On montrera comment les équations universelles de la dynamique des systèmes permettent d'obtenir deux intégrales premières.*

2° *Prouver que si la force vive initiale du système est* *petite, l'angle* β *variera dans un intervalle un peu plus grand que* $(-\beta_0, +\beta_0)$, *où* β_0 *est la valeur initiale de* β.



3° *Étudier en particulier le cas où les vitesses initiales sont nulles et l'angle* β_0 *petit.* (Juin 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une plaque homogène rectangulaire mince de poids* P *est suspendue par quatre fils élastiques verticaux identiques attachés aux quatre sommets de la plaque et dont les quatre autres extrémités sont fixes dans un même plan horizontal* H.

A l'instant initial, le système est en équilibre et l'on abandonne sans vitesse initiale un petit corps sphérique homogène de poids p *sur la verticale du centre de la plaque et au-dessus.*

Étudier le mouvement ultérieur.

Remarque. — *La tension* T *de chaque fil est proportionnelle à l'allongement* $z - l$ *du fil à partir de la longueur naturelle* l

$$T = \lambda(z - l).$$

Après chaque choc, la vitesse relative de la petite sphère par rapport à la plaque est multipliée par $-e$, e *étant* *un coefficient d'élasticité constant. On n'examinera que le cas où la sphère est molle* ($e = 0$) *et celui où elle est parfaitement élastique ainsi que la plaque* ($e = 1$).

On négligera les masses des fils et l'on supposera que la sphère est à l'instant initial à une distance du plan H *égale à* l.

On appellera h *la longueur initiale de chaque fil.*

On supposera $P = p$ *lorsque* $e \neq 0$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Soient* p, ρ *la pression et la densité atmosphériques à l'altitude* z; p_0, ρ_0 *leurs valeurs à la surface de la Terre.*

Déterminer p *en fonction de* z *en supposant que les variations de température de l'atmosphère soient telles qu'on ait*

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const.},$$

γ *étant une certaine constante et en tenant compte des variations de l'intensité de la pesanteur avec* z.

2° *Trouver le moment d'inertie d'un disque circulaire homogène infiniment mince de rayon* R *et de masse* M *par rapport à une droite quelconque* Δ.

On appellera δ *la distance de* Δ *au centre du disque et* α *son angle aigu avec le plan du disque.*

Application numérique. — *La masse du disque est égale à* 2^{kg}, *son rayon vaut* 3^{dm}, $\alpha = 30°$ *et* δ *vaut* 1^{m}.

(Novembre 1911.)

Rennes.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — PREMIÈRE QUESTION : Problème. — *Un système de quatre masses, l'une* M_0 *portée par un point fixe* P, *les autres* m_1, m_2, m_3 *portées respectivement par trois points mobiles* A_1, A_2, A_3, *s'attirent mutuellement, proportionnellement aux masses et à leurs distances.*

Les points A_1, A_2, A_3 *sont unis par des liaisons sans* *frottement, de manière que le triangle* $A_1A_2A_3$ *reste semblable à un triangle donné.*

Étudier le mouvement des trois masses mobiles.

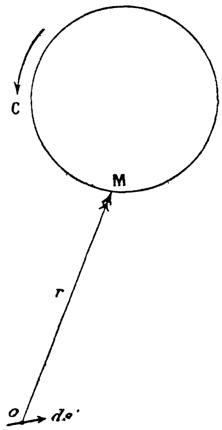
On envisagera particulièrement le cas suivant :

Les masses m_1, m_2, m_3 *sont égales et le triangle* $A_1A_2A_3$ *reste équilatéral.*

De plus, à l'instant initial : 1° *le point* P *coïncide avec le centre de gravité du triangle* $A_1A_2A_3$; 2° *en ce même instant initial la vitesse de chaque sommet* A_i *du triangle résulte d'un mouvement de rotation du triangle solidifié autour d'un axe perpendiculaire à son plan mené par son centre de gravité* g_0 *et d'une vitesse dirigée de* g_0 *vers* A_i. *égale d'ailleurs numériquement à la vitesse linéaire qui serait due à la vitesse initiale* N *de la rotation considérée.*

Seconde question : Statique du corps rigide. — *Exposer la réduction de Poinsot, en déduire la détermination des centres de gravité.*

Épreuve pratique. — *Un conducteur curviligne fermé*



parcouru par un courant électrique d'intensité i agit sur *un élément de courant ds' traversé par un courant d'intensité i' placé sur l'origine d'un système d'axes de coordonnées rectangulaires, et produit sur cet élément une force dont les composantes* XYZ *sont, par les formules*

$$X = \frac{1}{2} i i' \, ds' (bC - cB),$$

$$Y = \frac{1}{2} i i' \, ds' (cA - aC),$$

$$Z = \frac{1}{2} i i' \, ds' (aB - bA),$$

formules dans lesquelles abc désignent les cosinus directeurs de l'élément ds' et dans lesquelles les quantités ABC *sont définies par les intégrales curvilignes suivantes :*

$$A = \int_C \varphi(r)(y\,dz - z\,dy),$$

$$B = \int_C \varphi(r)(z\,dx - x\,dz),$$

$$C = \int_C \varphi(r)(x\,dy - y\,dx),$$

où x, y, z désignent les coordonnées d'un point M *du conducteur dont r est la distance à l'origine, φ est une certaine fonction de la distance.*

On demande de transformer les intégrales curvilignes A, B *et* C *en intégrales de surface portant sur une aire quelconque* Σ *appuyée sur le contour* C, *par une triple application du théorème de Stokes.*

(Juin 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe* O *en supposant que l'ellipsoïde d'inertie relatif à ce point est de révolution, et que le corps est soumis à l'action d'une force* F *appliquée en un point de l'axe.*

Déterminer la force nécessaire pour produire un mou-

vement donné de précession et de nutation dans le cas d'une rotation rapide autour de l'axe.

II. *Un plan* P *tourne uniformément autour de la verticale d'un de ses points* O. *Une tige homogène pesante* OA, *de longueur a dont l'une des extrémités est fixée en* O, *est mobile dans le plan* P. *Trouver les positions d'équilibre relatif de la tige, et étudier son mouvement relatif dans le plan. Cas des petites oscillations.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un solide homogène a la forme d'un parallélépipède rectangle dont la base est un carré de côté a, et dont la hauteur est égale à e. On demande de trouver sur l'axe du parallélépipède, perpendiculaire à la base, un point* O *pour lequel l'ellipsoïde d'inertie se réduise à une sphère, et de calculer le moment d'inertie du corps par rapport à une droite quelconque passant en* O. *Conditions de possibilité.*

Applications :

$$a = 20^{\text{cm}},$$
$$c = 12^{\text{cm}}.$$

Densité du corps : 7,5.

(Juin 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Mouvement de Poinsot.*

II. *Un fil flexible et inextensible, de masse négligeable, est enroulé sur un cylindre de révolution pesant, non homogène, mobile sans frottement autour de son axe de figure, qui est horizontal. L'une des extrémités du fil s'attache au cylindre; l'autre pend verticalement et supporte un poids* P.

1° *Étudier le mouvement du système; reconnaître s'il peut être oscillatoire et examiner le cas des petites oscillations.*

2° *Supposant que l'on ait déterminé expérimentalement la durée des petites oscillations pour le cas d'un poids* P, *et ensuite pour le cas d'un poids différent* P′, *et connaissant, d'autre part, la masse du cylindre, on demande de* *calculer le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe de suspension, ainsi que la distance du centre de gravité à cet axe.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un récipient à 4° a la forme d'un tétraèdre régulier dont la face supérieure est horizontale. Déterminer la pression du liquide sur chacune des faces latérales ainsi que la position du centre de pression correspondant.* (Novembre 1911.)