P. DELENS

Extraction rapide de certaines racines exactes d'indice quelconque

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 289-300

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__289_0>

[11]

EXTRACTION RAPIDE DE CERTAINES RACINES EXACTES D'INDICE QUELCONQUE;

Par M. P. DELENS.

Les Communications faites récemment à la Société d'Anthropologie par M. Quinton ont attiré l'attention sur les procédés d'extraction rapide des racines cubiques et cinquièmes de grands nombres; ces recherches généralisées pouvant, en dehors de leur intérêt théorique, rendre service dans la pratique journalière des calculs, il m'a semblé utile de rappeler diverses propriétés des puissances, établies en 1876 par G. Dostor (*Archiv der Mathematik und Physik*), et d'en indiquer en même temps d'autres qui conduisent à une méthode simple, et peut-être nouvelle, permettant de *trouver rapidement* (avec certaines restrictions, cependant) *une racine exacte, ayant un indice impair aussi élevé qu'on voudra, de deux ou même de trois chiffres, ainsi d'ailleurs, quoique un peu moins facilement, que des racines d'indice pair.*

A. — Racines d'ordre impair.

Recherche du chiffre des unités de la racine. — Si l'on considère le Tableau (reproduit ci-après) formé par les unités des puissances successives des dix, et même des onze premiers nombres (en ajoutant zéro), on voit tout d'abord que les puissances $5^{\text{ièmes}}$ sont terminées par le même chiffre que les nombres eux-mêmes, ce qui permet d'en déduire, comme conséquence immédiate, la propriété fondamentale suivante :

Les chiffres des unités des diverses puissances d'un nombre se reproduisent quand l'exposant de la puissance augmente de quatre unités.

Il suffira par suite de connaître les chiffres des unités des quatre premières puissances des nombres pour avoir ceux d'une puissance quelconque.

En second lieu, on remarque également que les chiffres des unités des puissances d'ordre impair sont toujours *tous* différents (des chiffres complémentaires donnant d'ailleurs lieu à des chiffres d'unités qui sont eux-mêmes complémentaires); tandis que ceux des puissances d'ordre pair se reproduisent symétriquement par rapport au terme du milieu 5.

On en conclut que, inversement, si l'on se donne une puissance parfaite d'ordre quelconque, il sera toujours possible de trouver, grâce aux remarques précédentes, le chiffre des unités de la racine, sans aucune ambiguïté, *si la puissance est impaire*, en se reportant aux colonnes relatives à la première ou la troisième puissance (qu'il suffit de connaître seule) dans le Tableau formé tout d'abord, suivant que l'exposant de la puissance est de la forme $4k+1$ ou $4k-1$; tandis que si l'exposant de la puissance est pair, il n'en sera pas de même, puisqu'on pourra toujours hésiter entre deux chiffres complémentaires, en tenant uniquement compte des propriétés que nous venons d'indiquer.

Exemples :

$$4^{13} = 67108864,$$

où

$$13 = 4k+1,$$

et

$$7^{11} = 1977326743,$$

où

$$11 = 4k - 1.$$

Tableau des unités des puissances successives des premiers nombres.

N.......	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N^2.......	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0
N^3.......	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9	0
N^4.......	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1	0
N^5.......	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Recherche du chiffre des dizaines de la racine. — Ayant obtenu, comme nous venons de l'indiquer, le chiffre des unités d'une racine exacte d'indice impair quelconque, cherchons maintenant à obtenir le chiffre des dizaines de cette racine, que nous supposons n'avoir actuellement que deux chiffres. Lorsque l'exposant de la puissance parfaite donnée est simple, et a pour valeur 3 ou 5, par exemple, il est facile de calculer rapidement ce chiffre des dizaines en partageant le nombre donné en tranches de trois ou cinq chiffres à partir de la droite et en cherchant, dans le Tableau des cubes ou des 5^{ièmes} puissances des dix premiers nombres, le plus grand nombre inférieur à la tranche de gauche du nombre donné; la racine de ce nombre sera le chiffre des dizaines demandé.

Mais ce procédé, qui peut servir pour les puissances d'exposant faible, est évidemment inapplicable pour une puissance d'ordre élevé quelconque, et il est alors indispensable d'avoir recours à une autre méthode.

Nous utiliserons dans ce cas la correspondance qui existe entre le reste de la division d'un nombre par un diviseur connu d, et celui des différentes puissances de ce même nombre par le même diviseur, correspondance qui résulte des égalités

$$N^\alpha = (m.d + r)^\alpha = m.d + r^\alpha = m.d + r',$$

si $r^\alpha = m.d + r'$, r et r' étant les restes de division de N et N^α par d.

Le diviseur le plus simple à essayer est évidemment égal à 9; si nous nous reportons au Tableau formé ci-après pour les restes de la division par 9 des puissances successives des dix premiers nombres (zéro compris), nous constatons aussitôt :

1° Que les restes pour l'exposant 6 étant 1 ou 0, ceux des différentes puissances se reproduiront de 6 en 6 (en laissant de côté, pour la première puissance, les multiples de 3 qui donnent toujours ensuite 0 pour reste);

2° Que les restes des puissances d'exposant pair se reproduisent symétriquement par rapport au milieu de la colonne;

3° Que les restes des exposants multiples de 3 se reproduisent au moins trois fois.

Il en résulte donc que les seules puissances qui puissent donner sans ambiguïté par ce procédé une correspondance exacte entre les restes du nombre et de la puissance considérée, sont celles dont les exposants ne sont ni pairs, ni multiples de 3, c'est-à-dire finalement ici celles dont *l'exposant est de la forme* $6k \pm 1$, *sauf cependant lorsque la puissance donnée est multiple de* 9 *ou sa racine multiple de* 3.

On ne pourra donc employer cette recherche du reste de la division du nombre donné par 9 pour obtenir le chiffre des dizaines de la racine, que si l'indice de la racine est bien de cette forme, et en tenant compte de la restriction indiquée.

Tableau des restes de la division par 9 des puissances des dix premiers nombres.

	Restes de					
N.	N^1.	N^2.	N^3.	N^4.	N^5.	N^6.
0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	2	4	8	7	5	1
3	3	0	0	0	0	0
4	4	7	1	4	7	1
5	5	7	8	4	2	1
6	6	0	0	0	0	0
7	7	4	1	7	4	1
8	8	1	8	1	8	1
9	0	0	0	0	0	0

Le deuxième diviseur que l'on doit essayer, à cause de la facilité que l'on a à former le reste de la division d'un nombre quelconque par ce diviseur, est évidemment 11.

Formons donc le Tableau des restes des douze premiers nombres (zéro compris) par ce nombre (Tableau ci-après); nous voyons aussitôt :

1° Que les restes de la 10$^{\text{ième}}$ puissance étant tous égaux à 1 (en dehors du premier et du dernier), les restes des autres puissances se reproduisent périodiquement de 10 en 10;

2° Que les restes de puissances d'exposant impair sont tous différents (en laissant de côté l'indice 5);

3° Que les restes des puissances d'exposant pair se reproduisent symétriquement à partir du milieu de la colonne, et que ceux dont l'exposant est multiple de 5 se reproduisent cinq fois au moins. Il en résulte donc qu'il sera toujours possible d'utiliser les restes de la division par 11 pour *les extractions de racines d'indice impair, sauf quand cet indice sera multiple* *de* 5, et qu'il suffira d'avoir formé les restes des puissances $3^{\text{ième}}$, $7^{\text{ième}}$ et $9^{\text{ième}}$ des douze premiers nombres; quant aux puissances d'ordre pair ou multiple de 5, cette méthode donnera d'ordinaire plusieurs solutions. On voit également, d'après ces remarques, que ce procédé est préférable à celui qui consiste à déterminer le reste de la division par 9 du nombre donné.

Tableau des restes de la division par 11 *des puissances des douze premiers nombres.*

	Restes de									
N.	N^1.	N^2.	N^3.	N^4.	N^5	N^6.	N^7.	N^8	N^9.	N^{10}.
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1
3	3	9	5	4	1	3	9	5	4	1
4	4	5	9	3	1	4	5	9	3	1
5	5	3	4	9	1	5	3	4	9	1
6	6	3	7	9	10	5	8	4	2	1
7	7	5	2	3	10	4	6	9	8	1
8	8	9	6	4	10	3	2	5	7	1
9	9	4	3	5	1	9	4	3	5	1
10	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Exemple. — Supposons que le nombre donné soit

$$170\,581\,728\,179\,578\,208\,256.$$

et qu'on sache que c'est une puissance $13^{\text{ième}}$ parfaite. L'exposant 13 étant de la forme $4k+1$, le chiffre des unités de la racine est égal à celui du nombre donné; sa valeur est donc égale à 6. Pour avoir le chiffre des dizaines, formons le reste de la division par 11 de la puissance fournie; il est égal à

$$52 - 47 = 5.$$

Si l'on se reporte dans le Tableau des restes indiqué plus haut à la colonne des cubes, puisque

$$13 - 10 = 3,$$

on voit que le reste correspondant du nombre cherché est aussi égal à 3; par suite, la différence $6 - 3 = 3$ donne exactement le chiffre des dizaines de la racine demandée, qui est donc égale à 36.

Recherche du chiffre des centaines de la racine. — Nous supposerons maintenant que la racine exacte cherchée, étant toujours d'indice impair, contient trois chiffres; pour trouver à la fois les chiffres des dizaines et des centaines de cette racine, celui des unités étant obtenu par le premier procédé, il suffira de déterminer successivement les restes de la division par 9 et par 11 de cette racine comme nous venons de l'indiquer, ce qui donnera deux équations distinctes, qui permettront d'obtenir la somme et la différence des chiffres cherchés et, par suite, ces chiffres eux-mêmes, en supposant toutefois que *la puissance donnée ait un exposant de la forme* $6k \pm 1$, *non divisible par* 5, *et qu'en outre elle ne soit pas divisible par* 9, afin que les conditions précédemment exposées soient toutes réalisées.

Nous allons montrer sur un exemple le procédé qui devra être suivi.

Exemple. — On donne le nombre

$$13723332506969728,$$

qui est une $7^{\text{ième}}$ puissance exacte (forme $6k + 1$) d'un nombre de trois chiffres, et l'on demande de trouver sa racine $7^{\text{ième}}$.

Chiffre des unités. — L'exposant 7 étant de la forme $4k-1$, le chiffre des unités cherché est égal à

$$10-8=2.$$

Chiffres des dizaines et des cèntaines. — Les restes de la division du nombre donné par 11 et par 9 sont les mêmes que ceux de $46-30=16$, par 11, c'est-à-dire 5, et de $46+30=76$ par 9, soit 4; les restes de la racine cherchée par 11 et par 9 sont alors, d'après les Tableaux précédemment formés, 4 et 4; si donc on représente par x et y les chiffres des centaines et des dizaines de la racine, qui s'écrira par suite $xy2$, on aura les égalités

$$2+x-y=m.11+4$$

et

$$2+x+y=m.9+4;$$

ou

$$x-y=m.11+2,$$
$$x+y=m.9+2,$$

ce qui donne

$$2x=m.11+m.9+4$$

et

$$2y=m.9-m.11;$$

on a donc nécessairement

$$x=2$$

et

$$y=0,$$

les autres valeurs trouvées pour x et y étant inacceptables; la racine cherchée est, par suite, égale à 202.

Il est évidemment possible, dans certains cas, de trouver, par un procédé semblable, un plus grand nombre de chiffres à la racine (supposée toujours exacte), en employant de nouveaux diviseurs convenablement choisis; mais les calculs sont alors sensiblement plus longs, et ne présentent plus, par suite, le même intérêt; de sorte qu'il paraît inutile de les entreprendre ici, les exemples donnés précédemment suffisant bien pour montrer l'utilité de la méthode adoptée, qu'on pourra suivre encore pour déterminer les chiffres successifs de certaines racines d'indice impair.

B. — Racines d'indice pair.

Les recherches faites en utilisant les restes des puissances des différents nombres par certains diviseurs, permettent également de déterminer les racines d'indice pair, en levant le doute qui existe tout d'abord sur le chiffre des unités de ces racines.

Nous avons vu en effet que les chiffres des unités, dans le cas des puissances à exposant pair, se reproduisent symétriquement par rapport au milieu de la colonne, c'est-à-dire sont égaux pour deux chiffres complémentaires.

Mais, si l'on considère les Tableaux des restes de ces mêmes puissances par les diviseurs 9 et 11, ces restes se reproduisent aussi symétriquement par rapport au milieu de chaque colonne pour les puissances d'exposant pair (en laissant de côté pour le diviseur 9 les exposants multiples de 6 et, pour le diviseur 11, ceux qui sont multiples de 10); il en résulte donc que ces restes sont égaux pour des nombres dont la somme est égale à 9 dans le premier cas, et égale à 11 dans le deuxième ; il sera par suite possible d'utiliser les restes de ces divisions de la puissance donnée soit par 9, soit par 11 (le deuxième Tableau restant préférable au premier pour les raisons déjà exposées) pour déterminer exactement la racine, en supposant toutefois qu'elle n'ait qu'un seul chiffre. Et si l'on veut employer simultanément les deux restes trouvés (ou même en former encore d'autres convenablement choisis), on pourra de la même façon déterminer, en passant rapidement en revue les différents cas qui peuvent se présenter, deux chiffres à la racine (ou davantage), en tenant toujours compte, bien entendu, des restrictions énoncées.

Nous allons donner, pour terminer, des exemples numériques relatifs à ces divers cas.

1° On donne le nombre

$$31381059609,$$

qui est une puissance $22^{\text{ième}}$ parfaite; trouver sa racine.

Il est évident tout d'abord que cette racine n'a qu'un chiffre, puisque la puissance donnée a un nombre de chiffres inférieur à 23.

Le chiffre des unités du nombre considéré étant égal à 9, comme $22 = m.4 + 2$, le chiffre cherché de la racine ne peut être que 3 ou 7 (premier Tableau); d'autre part, le reste de la division par 11 du nombre donné étant ici égal à $27 - 18 = 9$, et l'exposant étant un multiple de 10 augmenté de 2, la racine ne peut être que 3 ou 8 (troisième Tableau); on en déduit donc que cette racine est égale à 3.

2° Supposons en second lieu que le nombre donné soit

$$6225969041361,$$

qui est une puissance $8^{\text{ième}}$ parfaite, et qu'on demande de calculer sa racine.

On voit aussitôt que la racine cherchée a deux chiffres, puisque le nombre des chiffres de la puissance donnée est compris entre 8 et 15.

L'exposant de la puissance étant un multiple de 4, et le chiffre de ses unités étant égal à 1, la racine peut être terminée par l'un des quatre chiffres 1, 3, 7, 9 (premier Tableau); d'autre part, le reste de la division par 9 du nombre donné ayant pour valeur 1, et l'exposant étant de la forme $6k + 2$, le reste correspondant de la racine ne peut être que 1 ou 8 (deuxième Tableau); les seules solutions possibles sont donc

91, 73, 37, 19 (reste 1),

ou

71, 53, 17, 89 (reste 8).

Le reste de la division par 11 de la puissance donnée a pour valeur 3, et comme l'exposant est égal à 8, le reste correspondant de la racine ne peut être que 2 ou 9 (troisième Tableau).

On voit donc, en passant en revue les diverses solutions possibles indiquées plus haut, que la seule acceptable est ici 53; ce qui donne par suite la valeur demandée de la racine.

3° Si enfin l'exposant de la puissance donnée est faible, et égal à 2 ou à 4, par exemple, de telle sorte qu'on puisse calculer facilement par la méthode ordinaire le chiffre des plus hautes unités de la racine correspondante, on pourra trouver rapidement, grâce au procédé des restes, cette racine complète, en supposant qu'elle ait seulement trois chiffres.

Extrayons ainsi la racine carrée du nombre 204304, qui est le carré parfait d'un nombre de trois chiffres. Le chiffre des unités de la racine ne peut être que 2 ou 8 (premier Tableau); celui des centaines a pour valeur 4; il ne reste plus à déterminer que celui des dizaines, et en même temps à distinguer le chiffre exact des unités.

Formons pour cela les restes du nombre donné par 9 et par 11, qui sont 4 et 1; les restes correspondants de la racine sont alors 2 ou 7 dans le premier cas (deuxième Tableau), et 1 ou 10 dans le deuxième (troisième Tableau). On voit donc, en se servant du diviseur 9, que la racine ne peut avoir que les valeurs 452 ou 488 (reste 2), ou bien 412 et 448 (reste 7), et en déterminant les restes par 11 de ces diverses solutions, on vérifie immédiatement que 452 est la seule exacte, les autres donnant des restes différant de 1 ou de 10.