Nouvelles annales de mathématiques

Émile Turrière

Généralisation des courbes de Ribaucour

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 275-287

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__275_0>

[O¹2e]

GÉNÉRALISATION DES COURBES DE RIBAUCOUR;

Par M. Émile TURRIÈRE,

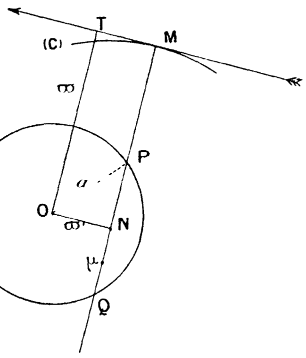
Dans son admirable *Étude sur les élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle* (1880), A. Ribaucour fut amené à utiliser des courbes qui avaient été considérées dès 1716 par Jean Bernoulli; ces courbes planes, qui portent le nom de *courbes de Ribaucour*, sont définies par la propriété suivante qui les caractérise : le rapport entre le rayon de courbure en un point et le segment de normale (limité au point de départ et à l'axe des x) est un nombre constant.

Je me propose de définir et d'étudier des courbes plus générales, qui sont, par rapport aux courbes de Ribaucour, ce que sont les tractrices circulaires de Morley-Bordoni à l'égard de la tractrice ordinaire.

Je considère un cercle fixe de centre O, origine des coordonnées et de rayon a. Je suppose que la normale à une courbe (C) du plan, en un quelconque M de ses points, rencontre la circonférence du cercle fixe aux deux points P et Q, et je pose la condition suivante : le rapport, entre le rayon de courbure R de (C) en M et l'un des deux segments MP ou MQ doit être constant (*fig.* 1).

En se reportant à une Thèse récente de M. L. Braude, *Ueber einige Verallgemeinerungen des Begriffes der Mannheimschen Kurve* (Heidelberg, 1911), on peut dire que les courbes ici considérées sont celles dont une *développée imparfaite* est un cercle.

1. Tout d'abord, il y a lieu de s'occuper du cas où les deux rapports $\frac{R}{MP}$ et $\frac{R}{MQ}$ sont simultanément cons-



tants. Il en est de même alors du rapport $\frac{MP}{MQ}$. Quelles sont les courbes (C) pour lesquelles $\frac{MP}{MQ}$ est un rapport constant?

D'une façon générale, pour déterminer, de la manière la plus simple et la plus élégante à la fois, une courbe caractérisée par la relation imposée entre les deux segments MP et MQ, il suffit de considérer cette courbe inconnue (C), en coordonnées de Hesse, c'est-à-dire définie comme étant l'enveloppe de la droite variable d'équation

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = \varpi(\varphi);$$

ϖ est une fonction de l'azimut φ, admettant des dérivées des deux premiers ordres $\varpi' = \frac{d\varpi}{d\varphi}$ et $\varpi'' = \frac{d^2\varpi}{d\varphi^2}$. Des définitions géométriques de ϖ et de ϖ', qui sont respectivement les distances de O à la tangente et à la normale en M à la courbe (C), il résulte que l'on peut poser, dans tous les cas de figure :

$$MP = \varpi - \sqrt{a^2 - \varpi'^2}.$$
$$MQ = \varpi + \sqrt{a^2 - \varpi'^2};$$

lorsque MP et MQ seront liés par une condition imposée, la fonction ϖ sera définie par une équation différentielle qui ne contient pas la variable φ. On aura donc

$$d\varphi = f(\varpi)\,d\varpi,$$
$$\varphi = \int f(\varpi)\,d\varpi + \varphi_0,$$

la constante d'intégration φ_0 n'influant pas sur la forme de la courbe cherchée, qui est définie à une rotation près autour de O : il est d'ailleurs évident *a priori* que l'équation différentielle du problème admet la rotation autour de O comme transformation infinitésimale et doit, par conséquent, être intégrable par quadrature. Plus particulièrement, dans le cas d'une relation symétrique entre les deux segments, les calculs seront très simples, puisque $MP + MQ$ et $MP \times MQ$ ont pour expressions :

$$MP + MQ = 2\varpi,$$
$$MP \times MQ = \varpi^2 + \varpi'^2 - a^2.$$

C'est ainsi que la relation $MP \times MQ =$ const. s'exprime par une équation différentielle, dont l'intégrale singulière est une circonférence et dont l'intégrale générale est un point quelconque de cette circonférence. La relation linéaire la plus générale entre $MP + MQ$ et $MP \times MQ$ conduit aussi à des points et à des cercles; soit, en effet,

$$A(MP + MQ) + B \times MP \times MQ + C = 0,$$

cette relation à coefficients constants A, B et C. Considérons une courbe (C') parallèle à la courbe cherchée (C). Soit M' le point de (C') qui correspond à (C), posons

$$MM' = K, \qquad M'P = MP + K, \qquad M'Q = MQ + K;$$

la relation précédente entraîne la suivante

$$\begin{aligned}&(A - BK)(M'P + M'Q)\\ &\quad + B \times M'P \times M'Q + C + BK^2 - 2AK = 0;\end{aligned}$$

pour la courbe (C') particulière, qui correspond à la valeur

$$K = \frac{A}{B},$$

on a, par conséquent :

$$M'P \times M'Q = \text{const.}$$

Cette courbe (C') est, d'après ce qui précède, un point ou un cercle de centre O. La relation considérée caractérise donc les cercles du plan. C'est là une propriété qui peut être facilement établie par la méthode analytique. Dans le cas particulier

$$\frac{1}{MP} + \frac{1}{MQ} = \text{const.},$$

par exemple, l'équation prend la forme

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{d\varpi}{\sqrt{(\varpi - l)(m - \varpi)}};$$

d'où résulte l'expression suivante de ϖ en fonction de φ

$$\varpi = \frac{l + m}{2} + \frac{l - m}{2} \cos(\varphi - \varphi_0);$$

cette équation est caractéristique d'un cercle.

La condition $MP - MQ = \text{const.}$ caractérise évidemment la développante de cercle; la relation $\overline{MP}^2 + \overline{MQ}^2 = \text{const.}$ caractérise la courbe transcendante d'équation

$$\varpi = K \operatorname{ch}(\varphi - \varphi_0),$$

qui se présente fréquemment dans les applications; la relation $\overline{MQ}^2 - \overline{MP}^2 = \text{const.}$ caractérise une courbe transcendante d'équation

$$\varpi^2 - a^2\varphi^2 = b^2,$$

et qui, par conséquent, généralise la développante de cercle; l'équation de cette développante est d'ailleurs celle que l'on obtient pour $b = 0$:

$$\varpi = a\varphi.$$

Revenant au cas $\dfrac{MP}{MQ} = \text{const.}$, l'équation différentielle correspondante est

$$\frac{a^2 - \varpi'^2}{\varpi^2} = \text{const.};$$

elle admet pour intégrale générale une *épicycloïde* d'équation

$$\varpi = \frac{a}{m} \sin m(\varphi - \varphi_0);$$

pour cette épicycloïde, le rayon de courbure

$$R = -(\varpi + \varpi'')$$

est, lui aussi, proportionnel à ϖ, de même que MP et MQ; par conséquent, *l'épicycloïde est la courbe la plus générale pour laquelle les deux rapports* $\dfrac{R}{MP}$ *et* $\dfrac{R}{MQ}$ *sont tous deux constants*. Cette propriété est une conséquence de la construction cinématique du centre de courbure de l'épicycloïde.

2. Abordons maintenant le cas général, pour lequel un seul des deux rapports est constant. Il serait possible de traiter le problème en coordonnées cartésiennes (ou polaires), d'effectuer un calcul analogue à celui par lequel A. Bordoni obtint l'équation de la tractrice circulaire (Gino Loria, *Spezielle ebene Kurven*, t. II, p. 197) : l'emploi des coordonnées de Hesse conduira plus rapidement au but. J'ai, d'ailleurs, utilisé ces mêmes coordonnées pour la recherche de l'équation de la tractrice du cercle, dans un récent article *Sur les roulettes à base rectiligne*, inséré dans l'*Enseignement mathématique*.

Soit donc K le rapport constant du rayon de courbure $M\mu$ et du segment MP de normale. L'équation différentielle des courbes (C) est

$$\frac{\varpi + \varpi''}{\varpi - \sqrt{a^2 - \varpi'^2}} = K. \tag{1}$$

Cette équation du second ordre ne contient pas φ, ce qui est évident, d'ailleurs, *a priori*; r désignant le rayon vecteur OM, défini par la relation

$$\varpi^2 + \varpi'^2 = r^2,$$

cette équation différentielle prend la forme d'une équation du premier ordre

$$\frac{dr}{d\varpi} = 2K\left[\varpi - \sqrt{a^2 + \varpi^2 - r^2}\right];$$

par l'introduction de la nouvelle variable u que définit la relation

$$r^2 = a^2 + \varpi^2 - u^2, \tag{2}$$

l'équation différentielle prend la forme homogène

$$u\frac{du}{d\varpi} = (1 - K)\varpi + Ku;$$

il suffit alors de poser

$$u = z\varpi$$

pour séparer les variables u et z;

$$\frac{d\varpi}{\varpi} = \frac{z\,dz}{1 - K + Kz - z^2} = \frac{-z\,dz}{(z-1)(z+1-K)};$$

lorsque K *est différent de* 2, on a

$$(2 - K)\frac{d\varpi}{\varpi} = \frac{dz}{z-1} + \frac{1-K}{z+1-K}\,dz;$$

d'où résulte l'expression de ϖ en fonction de z, ϖ_0 étant la constante d'intégration,

$$(3) \qquad \left(\frac{\varpi}{\varpi_0}\right)^{k-2} = (z-1)(z+1-K)^{1-K};$$

il vient ensuite

$$(4) \qquad u = z\varpi, \qquad \varpi'^2 = a^2 - u^2 = a^2 - z^2\varpi^2;$$

d'où découlent la relation entre φ, z et ϖ

$$d\varphi = \frac{d\varpi}{\sqrt{a^2 - z^2\varpi^2}},$$

et enfin la relation qui exprime φ en fonction de z par une quadrature

$$(5) \quad \varphi - \varphi_0 = \pm\int \frac{z\,dz}{(z-1)(z+1-K)\sqrt{\dfrac{a^2}{\varpi_0^2}(z-1)^{\frac{2}{2-k}}(z+1-K)^{2\frac{1-k}{2-k}} - z^2}}.$$

Les formules (3) et (5) définissent ϖ et φ en fonction d'un paramètre auxiliaire z : l'intégrale générale (C) de l'équation différentielle (1) est donc déterminée; elle dépend d'une quadrature (5). Les formules (2) et (4) permettent de calculer le rayon vecteur r et la distance ϖ' de l'origine à la normale en fonctions de z.

Le problème peut donc être considéré comme complètement résolu.

Dans le cas singulier pour lequel K est égal à 2, l'équation différentielle prend la forme

$$\frac{d\varpi}{\varpi} = \frac{-z\,dz}{(z-1)^2},$$

d'où résulte l'expression de ϖ en fonction de z

$$\varpi = \frac{\varpi_0}{z-1}\, e^{\frac{1}{z-1}}; \tag{6}$$

cette équation (6) renferme l'équation (3); par la même méthode que précédemment on trouve l'équation (7), analogue à l'équation (5), qui définit φ en fonction de z au moyen d'une quadrature

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int \frac{z\,dz}{(z-1)^2 \sqrt{\frac{a^2}{\varpi_0^2}(z-1)^2 e^{-\frac{2}{z-1}} - z^2}}. \tag{7}$$

3. Génération cinématique des courbes précédentes. — Ossian Bonnet (*Journal de Liouville*, t. IX, 1844, p. 103) a donné l'équation

$$x = \int \left(y^{-\frac{2n}{n+1}} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} dy,$$

pour représenter la roulette décrite par le pôle de la courbe d'équation polaire

$$r^n = \sin n\theta,$$

lorsque celle-ci est le profil générateur roulant sur une base rectiligne; il résulte de ces équations que les *courbes de Ribaucour sont les roulettes du pôle des spirales sinusoïdes lorsque celles-ci roulent sur une base rectiligne* (Haton de la Goupillière, *Journal* *de l'École Polytechnique*, 2ᵉ série, Cahier 15, 1911, p. 3 et 7).

Cherchons de même quelle courbe (Γ) doit rouler sur le cercle de centre O et de rayon a, considéré comme base fixe, pour qu'un point M, invariablement lié à (Γ), engendre une courbe (C) pour laquelle $\frac{R}{MP}$ soit constant; soit ρ le rayon de courbure de (Γ) au point qui est venu en P; soit D le diamètre du cercle des inflexions

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\rho};$$

la normale MP à la roulette de M rencontre le cercle des inflexions au centre instantané P et en un point $\mathfrak{J}$; le centre de courbure μ de la roulette (C) de M est sur MP et l'on a

$$\overline{MP}^2 = M\mathfrak{J} \times M\mu;$$

les rapports $\frac{M\mu}{MP}$ et $\frac{MP}{M\mathfrak{J}}$ sont constants. En rapportant la courbe mobile (Γ) au pôle M, soient r le rayon vecteur MP et V l'angle de la tangente en P avec ce rayon vecteur MP ; on a

$$M\mathfrak{J} = r - D \sin V;$$
$$r^2 = R(r - D \sin V);$$

On impose $\frac{R}{r} = K$; il en résulte

$$r(K-1) = KD \sin V,$$
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\rho} = \frac{K}{K-1} \frac{\sin V}{r}; \tag{8}$$

soient θ l'azimut qui repère le rayon vecteur MP par rapport à une direction fixe et σ l'abscisse curviligne sur la courbe (Γ); la relation générale

$$\sin V = r \frac{d\theta}{d\sigma}$$

permet donc d'écrire

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\rho} = \frac{K}{K-1}\frac{d\theta}{d\sigma};$$

$d\varphi$ étant, d'autre part, l'angle de contingence de la courbe (Γ), cette relation devient

$$\frac{d\sigma}{a} + d\varphi = \frac{K}{K-1}d\theta,$$

ou

$$(9) \qquad \frac{\sigma}{a} + \varphi + \frac{K}{1-K}\theta = \text{const.}$$

Cette relation (9), lorsque a est infiniment grand, est la relation linéaire la plus générale entre l'azimut θ, l'angle φ qui repère la tangente par rapport à une direction fixe et l'angle V qui repère cette même tangente par rapport au rayon vecteur : les angles φ, θ, V sont en effet liés, en général, par une relation linéaire particulière; une relation linéaire quelconque entre ces trois angles peut donc être réduite à une relation entre deux quelconques d'entre eux. Une telle relation caractérise une classe de courbes étudiées par Fagnano et qui sont identiques aux spirales sinusoïdes (Gino Loria, *Spezielle ebene Kurven*, t. I, p. 471). Ce résultat est bien conforme à celui de Bonnet, puisque le cercle, base du roulement, est alors une droite.

La relation (9) caractérise donc des courbes qui constituent une curieuse généralisation des spirales sinusoïdes : *ces courbes sont celles pour lesquelles l'abscisse curviligne est une fonction linéaire générale des trois angles* θ, φ et V. Mais tandis que la relation analogue pour les spirales sinusoïdes ne permettait pas la rectification de ces courbes, cette relation (9) donne immédiatement la longueur d'un arc de la courbe (Γ) lorsqu'on connaît les extrémités de cet arc et les tangentes en ces points.

Toute circonférence passant par le pôle M appartient évidemment à cette classe de courbes : d'où il résulte de nouveau que les épicycloïdes sont des courbes (C) particulières.

4. Pour terminer, il convient de former l'équation de la courbe la plus générale qui satisfait à la relation (9). La courbe (Γ) étant supposée représentée en coordonnées polaires r et θ, le rayon de courbure ρ a pour expression

$$\rho = \pm \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''};$$

r' et r'' désignent les dérivées $\frac{dr}{d\theta}$ et $\frac{d^2 r}{d\theta^2}$. Il suffit de porter cette expression dans la relation

$$1 = \frac{A}{\rho} + B\frac{d\theta}{d\sigma}$$

qui s'obtient en différentiant la relation (9)

$$\sigma = A\varphi + B\,\delta\theta + \text{const.}$$

pour avoir l'équation différentielle du second ordre

$$(r^2 - r'^2)^{\frac{3}{2}} = (A + B)(r^2 + r'^2) + A(r'^2 - rr''),$$

dont la courbe (Γ) est l'intégrale générale. Cette équation ne contient pas sous forme explicite la variable θ et se ramène donc immédiatement au premier ordre. Je poserai

$$r' = r \operatorname{sh} u;$$

l'équation différentielle devient

$$A\frac{d(\operatorname{ch} u)}{dr} = (A + B)\frac{\operatorname{ch} u}{r} - \operatorname{ch}^2 u,$$

elle est, par suite, linéaire en $\frac{1}{\operatorname{ch} u}$; l'expression de $\operatorname{ch} u$ en fonction de r est

$$(10) \qquad \operatorname{ch} u = \frac{2A + B}{r + Cr^{-\frac{A+B}{A}}},$$

C étant la constante arbitraire d'intégration; l'expression de θ, c'est-à-dire l'équation polaire de la courbe cherchée, est enfin définie par une quadrature

$$(11) \qquad \theta = \int \frac{\left(1 + C r^{-\frac{B}{A}-2}\right) dr}{\sqrt{(2A+B)^2 - r^2\left(1 + C r^{-\frac{B}{A}-2}\right)^2}};$$

en posant

$$-\frac{2A+B}{A} = m.$$

Ces expressions (10) et (11) prennent les formes plus simples

$$\operatorname{ch} u = \frac{-mA}{r(1 + C r^m)},$$

$$(12) \qquad \theta = \int \frac{1 + C r^m}{\sqrt{A^2 m^2 - r^2(1 + C r^m)^2}} dr.$$

Quel que soit le rapport m, pour $C = 0$, on a une intégrale particulière définie par la quadrature

$$\theta = \int \frac{dr}{\sqrt{A^2 m^2 - r^2}};$$

son équation est, par conséquent,

$$r = A m \sin(\theta - \theta_0);$$

c'est le cercle qui correspond à la solution épicycloïdale.

Les formules (10), (11) et (12) cessent d'avoir un sens lorsque m est nul. L'équation différentielle en ch u admet alors pour intégrale générale

$$\operatorname{ch} u = A \frac{\log(\gamma r)}{r},$$

γ désignant la constante arbitraire d'intégration ; d'où résulte l'équation polaire

$$(13) \qquad \theta = \int \frac{dr}{\sqrt{A^2[\log(\gamma r)]^2 - r^2}}$$

de la courbe qui doit servir de profil générateur. Ce cas correspond a celui qui avait été rencontré au 2° pour la valeur singulière $K = 2$. On a bien pour cette valeur de K la relation

$$2A + B = 0,$$

c'est-à-dire $m = 0$.

Haton de la Goupillière a remarqué que la spirale logarithmique est la limite d'une famille de courbes spirales sinusoïdes, et peut être considérée comme étant la spirale sinusoïde d'indice zéro (Allégret, *Nouvelles Annales*, 1872, p. 163). Les courbes (12) qui constituent une généralisation des spirales sinusoïdes admettent de même la courbe (13) comme courbe limite.