Nouvelles annales de mathématiques

E. Guillemain

Sur la déformation infiniment petite des surfaces réglées à plan directeur

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 262-274

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__262_1>

[O¹6k]

SUR LA DÉFORMATION INFINIMENT PETITE DES SURFACES RÉGLÉES A PLAN DIRECTEUR;

PAR M. E. GUILLEMAIN, à Clermont-Ferrand.

Je me propose de résumer ici quelques résultats obtenus en étudiant la déformation infiniment petite des surfaces réglées à plan directeur, en renvoyant lorsque les démonstrations seront analogues, au Mémoire de M. Haag, traitant le cas des surfaces réglées quelconques, et paru aux *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

I. Je partirai des formules de Lelieuvre (*voir* Mémoire cité § 1): dans le cas à étudier, je prendrai le plan des xy parallèles aux génératrices (G) de la surface (S). Un point quelconque M de la surface sera défini par l'angle polaire α de la projection (g) de (G) sur xOy et par un deuxième paramètre β.

Par l'origine, menons une parallèle $O\lambda$ à la normale au point M de (S); θ_1, θ_2, θ_3 seront les coordonnées d'un point P de $O\lambda$, et si l'on désigne par λ et μ deux fonctions de α, s, on voit facilement qu'on a

$$\begin{aligned}\theta_1 &= -\lambda \sin\alpha,\\ \theta_2 &= \lambda\cos\alpha,\\ \theta_3 &= \mu.\end{aligned}$$

D'autre part, on sait que θ_1, θ_2, θ_3 vérifient une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = K\theta. \tag{1}$$

Écrivons cette condition pour θ_1 et θ_2, on obtient

$$\left\{\begin{aligned}&\sin\alpha\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial\alpha\,\partial\beta} - K\lambda\right) + \cos\alpha\,\frac{\partial\lambda}{\partial\beta} = 0,\\ &\cos\alpha\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial\alpha\,\partial\beta} - K\lambda\right) - \sin\alpha\,\frac{\partial\lambda}{\partial\beta} = 0.\end{aligned}\right. \tag{2}$$

Le système (2), considéré comme système d'équations homogènes, admet comme solution

$$
(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \lambda}{\partial \beta} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial \alpha \, \partial \beta} - K\lambda = 0. \end{cases}
$$

La première équation (3) nous donne $\lambda = f(\alpha)$, nous poserons $\lambda = -R$; l'autre, comme λ n'est pas nul, montre que l'on a $K = 0$.

En écrivant que θ_3 vérifie (1), on obtient

$$
\theta_3 = S + T,
$$

S et T étant respectivement des fonctions de α et de β, un raisonnement très simple montre que T ne peut ni être nul, ni être constant, sans quoi (S) serait développable, on peut donc, par un changement convenable de paramètres, prendre $T = \beta$, et l'on aura

$$
(4) \qquad \begin{cases} \theta_1 = R \sin \alpha, \\ \theta_2 = -R \cos \alpha, \\ \theta_3 = S + \beta. \end{cases}
$$

Portant ces valeurs dans les formules de Lelieuvre, on obtient, pour la surface (S), les équations suivantes :

$$
(S) \quad (5) \qquad \begin{cases} x = R(S + \beta) \cos \alpha - 2 \displaystyle\int S' R \cos \alpha \, d\alpha, \\ y = R(S + \beta) \sin \alpha - 2 \displaystyle\int S' R \sin \alpha \, d\alpha, \\ z = \displaystyle\int R^2 \, d\alpha. \end{cases}
$$

La surface (S_1) qui lui correspondra avec orthogonalité des éléments s'obtiendra en prenant

$$
\omega = A + B,
$$

A et B étant respectivement des fonctions de α et de β :

$$(S_1)\quad(6)\quad\begin{cases} x_1 = -(A+B)R\sin\alpha + 2\int A'R\sin\alpha\, d\alpha, \\ y_1 = \quad (A+B)R\cos\alpha - 2\int A'R\cos\alpha\, d\alpha, \\ z_1 = -(A+B)S \\ \qquad + (A-B)\beta + 2\int B\, d\beta + 2\int SA'\, d\alpha. \end{cases}$$

On peut d'ailleurs se débarrasser de la quadrature $\int B d\beta$ en posant

$$B = B'_1.$$

Les formules (5) montrent que, si l'on change β en $\beta + C$, C étant une constante, il suffit de modifier S pour avoir la même surface. De même, si l'on remplace β par $C\beta$, il suffit de multiplier les fonctions R et S par C pour avoir une surface homothétique de (S) dans le rapport C^2; donc, on pourra, sans changer la nature de (S) dans les calculs ultérieurs, remplacer une expression de la forme $C\beta + D$ par β.

Les formules (5) donnent immédiatement certaines propriétés de (S). Ainsi, si ϖ désigne le paramètre de distribution en un point, on aura, au signe près,

$$\varpi = \frac{dz}{da} = R^2.$$

Donc, les surfaces telles que leur paramètre de distribution soit constant, seront données en prenant pour R *une constante.*

Des équations (5) on déduit facilement le théorème suivant : *Le segment intercepté par deux lignes asymptotiques quelconques sur une génératrice variable est proportionnel à la racine carrée du paramètre de distribution.*

Les coordonnées d'un point de la ligne de striction s'obtiendront en remarquant qu'en ce point le plan tangent à la surface (S) est parallèle à Oz. Donc

$$\theta_3 = 0 \qquad \text{ou} \qquad S + \beta = 0.$$

Ce qui donnera comme équations de (L) :

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= -2\int S' Q \cos\alpha \, d\alpha, \\ \eta &= -2\int S' K \sin\alpha \, d\alpha, \\ \zeta &= \int R^2 \, d\alpha. \end{aligned} \right.$$

Pour que la ligne de striction (L) *soit en même temps ligne asymptotique, il faudra qu'on ait*

$$S = \text{const.}$$

Dans ce cas, les surfaces (S) correspondantes seront des conoïdes droits.

Si l'on pose

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = \rho^2,$$

on sait qu'on a (*voir* Mémoire cité § 6)

$$\rho^2 = -RR_1 \qquad \text{et} \qquad \rho^2 = \pm\tau,$$

R et R_1 désignant les rayons de courbure principaux au point M de (S) et τ désignant le rayon de torsion de la ligne asymptotique passant par M. Les formules (5) permettent, en suivant une méthode analogue à celle adoptée par M. Haag dans son Mémoire, de vérifier toutes ces propriétés, et donnent en particulier

$$\rho^2 = -\tau.$$

Si l'on désigne par h la distance M_0M d'un point M de (G) au point central, on retrouve la formule donnée dans le cas général

$$h^2 + \varpi^2 = r\varpi,$$

qui permet de construire le rayon de torsion en un point d'une ligne asymptotique β.

Étude de S_1. — Les propriétés de (S_1), qui semblent intéressantes, sont relatives aux lignes (α). *A priori*, celles-ci doivent être planes et le plan de chacune d'elles est perpendiculaire à la génératrice correspondante de (S). En effet, si l'on pose

$$2\int A'R \sin\alpha \, d\alpha = u, \qquad -2\int A'R \cos\alpha \, d\alpha = v,$$
$$2\int A'R \, d\alpha = w,$$

on obtient

$$(8) \qquad (x_1 - u)\cos\alpha + (y_1 - v)\sin\alpha = 0.$$

Lorsque α varie, le plan représenté par (8) enveloppe un cylindre parallèle à Oz, et dont l'équation ne dépend que d'une fonction arbitraire A lorsque la surface (S) est choisie; voyons si l'on peut déterminer A de façon à faire coïncider ce cylindre avec un cylindre arbitraire parallèle à Oz.

Il faut qu'on ait

$$(9) \qquad u\cos\alpha + v\sin\alpha = p,$$

p étant la fonction définissant le cylindre arbitraire.

En dérivant deux fois la relation (9), on tire

$$2RA' = -(p + p'') = \rho,$$

ρ désignant le rayon de courbure de la base du cylindre donné; donc *se donner la développable, c'est se donner la fonction* A' *et par suite* A *à une constante près qu'on peut faire rentrer dans* B.

Je dis que si une ligne particulière (α) *est une droite, il en est de même pour toutes les autres et* (S) *est développable.*

Pour cela, cherchons l'équation d'une ligne (α) dans son plan. On trouve

$$X = R(A + B),$$
$$Z = -(A + B)S + (A - B)\beta + 2\int B\, d\beta + 2\int SA'\, d\alpha.$$

Exprimant que le coefficient angulaire est constant

$$\frac{-B'(S + B) + A + B}{B'R} = K.$$

D'où, après intégration

$$B = \lambda\beta + \mu,$$

λ et μ constants.

D'après ce qu'on a vu, on peut prendre tout simplement $B = \beta$.

Les équations de (S_1) deviennent alors

$$\begin{aligned} x_1 &= -(A + \beta)R \sin\alpha + u, \\ y_1 &= (A + \beta)R \cos\alpha + v, \\ z_1 &= -(A + \beta)S + A\beta + w. \end{aligned}$$

Sous cette forme, on voit manifestement que (S_1) est réglée.

En cherchant si les lignes (α) admettent une enveloppe, on trouve que (S_1) est développable et que son arête de rebroussement a comme équations

$$\begin{aligned} x &= 2\int SA' \sin\alpha\, d\alpha, \\ y &= -2\int SA' \cos\alpha\, d\alpha, \\ z &= 2\int SA'\, d\alpha - A^2. \end{aligned}$$

Surface (Σ). — Les coordonnées du point P de (Σ), homologue du point M, sont

$$(10)\quad \begin{cases} X = \xi + SR\cos\alpha - \dfrac{R\cos\alpha\left[(A-B)\beta + 2\displaystyle\int B\,d\beta + w\right] + (S+\beta)v}{A+B}, \\ Y = \eta + SR\sin\alpha - \dfrac{R\sin\alpha\left[(A-B)\beta + 2\displaystyle\int B\,d\beta + w\right] - (S+\beta)u}{A+B}, \\ Z = \zeta + \dfrac{v\sin\alpha + u\cos\alpha}{A+B}R; \end{cases}$$

si, dans les formules (10), on fait $B = \beta$ les équations de (Σ) deviennent

$$X = \xi + SR\cos\alpha - \frac{(RA\cos\alpha + v)\beta + R\cos\alpha w + Sv}{A+\beta},$$

$$Y = \eta + SR\sin\alpha - \frac{(u - RA\sin\alpha)\beta - uS - Rw\sin\alpha}{A+\beta},$$

$$Z = \zeta + \frac{R(v\sin\alpha + u\cos\alpha)}{A+\beta}.$$

Si l'on coupe par un plan quelconque, on obtient une équation du premier degré en β; donc les lignes $\alpha = \text{const.}$ sont des droites, et (ξ) est réglée.

Si dans les formules (10) on fait $A = 0$, les équations de (Σ) sont

$$X = \xi + R\cos\alpha\left[S + \beta - \frac{2\displaystyle\int B\,d\beta}{B}\right],$$

$$Y = \eta + R\sin\alpha\left[S + \beta - \frac{2\displaystyle\int B\,d\beta}{B}\right],$$

$$Z = \zeta.$$

On voit que le point P de (Σ) coïncide avec le point M' de (S) obtenu en prenant

$$\alpha' = \alpha,$$

$$\beta' = \beta - \frac{2\displaystyle\int B\,d\beta}{B},$$

par conséquent, pour $A = 0$, (Σ) coïncide avec (S) et, par conséquent, est réglée,

Réciproquement, on démontre que si (Σ) est réglée, on se trouve dans un des deux cas examinés (*voir* Haag, Mémoire § 8).

Congruence G. — Pour étudier les congruences (G) dans le cas particulier des surfaces réglées à plan directeur, nous emploierons la méthode indiquée par M. Haag (Mémoire cité § 12), méthode basée sur ce que la droite MP, quand β varie seul, décrit une quadrique, et que, si l'on fait ensuite varier α, cette quadrique touche son enveloppe, suivant les quatre côtés d'un quadrilatère gauche, qui sont D, D_1, d, d_1, car la méthode, consistant à associer à une surface (S) une surface (S_1) (*voir* Mémoire § 10) donne lieu à des calculs très compliqués et dissymétriques, dans le cas actuel.

Partons de la surface (S) donnée par les équations (5), et cherchons l'équation d'une quadrique (Q), se raccordant à (S) le long d'une génératrice (D), et contenant deux tangentes asymptotiques d, d_1. Nous écrirons ensuite que (Q) touche son enveloppe suivant ces deux droites.

Les équations de D sont

$$(D)\quad (11)\qquad \begin{cases} P \equiv R\sin\alpha(X-\xi) - R\cos\alpha(Y-\eta) = 0, \\ Q \equiv Z - \zeta = 0. \end{cases}$$

La tangente asymptotique (p), au point M se trouve dans le plan tangent en M d'équation

$$(12)\qquad P + (S+\beta)Q = 0.$$

D'autre part, un calcul simple montre que cette droite est perpendiculaire à la direction définie par

$$R\cos\alpha + R'\sin\alpha, \quad R\sin\alpha - R'\cos\alpha, \quad S'.$$

Une deuxième équation de (d) sera donc

$$(R\cos\alpha + R'\sin\alpha)(X - x) \\ + (R\sin\alpha - R'\cos\alpha)(Y - y) + S'(Z - z) = 0$$

que nous écrirons

$$M + S'Q - R^2(S + \beta) = 0.$$

En posant

$$M = (X - \xi)(R\cos\alpha + R'\sin\alpha) - (Y - \eta)(R\sin\alpha - R'\cos\alpha).$$

Les équations de (d) seront

$$(d) \quad (13) \quad \begin{cases} P + mQ = 0 \\ M + S'Q - mR^2 = 0 \end{cases} \qquad m = S + \beta,$$

celles de (d_1)

$$(d_1) \quad (14) \quad \begin{cases} P + nQ = 0, \\ M + S'Q - nR^2 = 0. \end{cases}$$

L'équation de la surface engendrée par les droites (d) est

$$(14') \qquad \Pi \equiv S'A^2 + MQ + R^2P = 0;$$

c'est un paraboloïde hyperbolique.

Pour former l'équation de la quadrique (Q), remarquons qu'elle fait partie du faisceau déterminé par le paraboloïde osculateur (π) et par le couple de plans

$$P + mQ = 0,$$
$$P + nQ = 0;$$

son équation sera

$$(15) \quad (S) \equiv S'Q^2 + MQ + R^2P + t(P + mQ)(P + nQ) = 0.$$

Il faut maintenant supposer t, m, n fonctions de α et chercher la caractéristique de (Q). Avant de dériver (15) par rapport à α, remarquons qu'on a

$$(16)\quad \frac{\partial P}{\partial \alpha} = M, \quad \frac{\partial Q}{\partial \alpha} = -R^2, \quad \frac{\partial M}{\partial \alpha} = \delta P + \frac{2K'}{R} M + 2S'R^2.$$

En posant

$$\delta = -1 + \frac{R''}{R} - \frac{2R'^3}{R^2}.$$

On aura alors, après avoir tenu compte des relations (16),

$$\begin{aligned} T \equiv Q\left[QS'' + \delta P + \frac{2R'}{R} M\right] + 2RR'P \\ + t'(P + mQ)(P + nQ) + t(P + nQ)[M + m'Q - mR^2] \\ + t(P + mQ)[M + n'Q - nR^2] = 0; \end{aligned}$$

suivant ensuite la méthode indiquée par M. Haag (Mémoire n° **12**), on voit qu'on doit avoir

$$T \equiv KS + (P + mQ)[g(P + nQ) + h(S'Q + M - nR^2)]$$

ou

$$\begin{aligned} T \equiv K(S'P^2 + MQ + R^2P) \\ + (P + mQ)[l(P + nQ) + h(S'Q + M - nR^2)] \end{aligned}$$

en posant

$$l = g + kt.$$

Cette identité devant avoir lieu quels que soient P, Q, M.

En égalant les coefficients des termes semblables, nous obtenons les relations suivantes :

$$(17)\quad h = 2t, \qquad t' = l, \qquad k = \frac{2R'}{R} + (n - m)t.$$

$$(18)\quad S'' + t[nm' + mn' - S'(m + n)] = \frac{2R'}{R}.$$

$$(19)\quad \delta + t(m' + n' - 2S') = 0.$$

Les relations (18) et (19) sont les deux conditions nécessaires et suffisantes pour que la quadrique (G) touche son enveloppe suivant un quadrilatère gauche. Les côtés D, d, d_1 auront respectivement comme équations (11), (13), (14); quant au côté (D_1), on trouve, en suivant la marche employée dans le cas général

$$(D_1)\quad (20)\quad \left\{\begin{aligned} &2t^2P + \left[t' + \frac{2R'}{R}t + t^2(m-n)\right]Q + 2tR^2 = 0,\\ &\left[t' - \frac{2R'}{R}t + t^2(m+n)\right]P\\ &\qquad\qquad + 2t(S' + mnt)Q + 2tM = 0. \end{aligned}\right.$$

Examinons quelques cas particuliers obtenus en assujettissant le quadrilatère (Ω) à remplir certaines conditions.

Exigeons, par exemple, qu'il ait deux côtés confondus, qui doivent être des côtés opposés. Si ce sont D et D_1, on obtient

$$t = 0.$$

Dans ce cas (Q) coïncide avec le paraboloïde (π), les relations (18), (19) ne s'appliquent plus; il faut reprendre les calculs directement en cherchant à décomposer l'intersection de (π) avec la quadrique obtenue en déviant (14') par rapport à α. On trouve que le quadrilatère se compose des côtés D, D_1 confondus, d'un côté (d) à l'infini dans le plan $Q = 0$ et d'un quatrième côté à distance finie donné par

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &Q\left(S'' - \frac{2R'S'}{R}\right) + \delta P = 0,\\ &\delta(S'Q + M) + R(2R'S' - S'') = 0 \end{aligned}\right.$$

Imposons au paraboloïde (π) d'être équilatère, on devra avoir

$$S' = 0 \qquad \text{ou} \qquad S = C.$$

Les surfaces (S) seront donc des conoïdes droits, d'équations

$$x = R(\beta + C)\sin\alpha,$$
$$y = R(\beta + C)\sin\alpha,$$
$$z = \int R^2\, d\beta.$$

Proposons-nous de déterminer les surfaces (S), pour lesquelles le paraboloïde osculateur (π), relatif à chaque génératrice a son sommet sur cette génératrice.

Il suffit d'écrire que, si M est le sommet cherché, le plan tangent en ce point est perpendiculaire à la direction de l'axe. Cette direction est définie par

$$Q = 0,$$
$$M = 0.$$

Si nous écrivons que ces deux plans sont perpendiculaires au plan tangent, on aura

$$\left\{\begin{array}{l} S + \beta = 0, \\ RR' = 0. \end{array}\right.$$

La première des équations (22) donne la valeur de β définissant le sommet, l'autre donne $R^2 = C$.

Donc, les surfaces pour lesquelles le paraboloïde osculateur le long d'une génératrice a son sommet sur cette génératrice sont les surfaces (S) *pour lesquelles le paramètre de distribution est constant.*

En particulier, en appliquant à ces surfaces un théorème énoncé précédemment (p. 4), on voit *que deux lignes asymptotiques fixes déterminent, sur une génératrice variable, des segments égaux.*