Nouvelles annales de mathématiques

Gaston Cotty

Sur quelques propriétés arithmétiques de l'espace réglé

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 206-235

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__206_1>

[O7a]

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DE L'ESPACE RÉGLÉ;

PAR M. GASTON COTTY.

Indépendamment de l'intérêt que présente toute étude de Géométrie au point de vue des propriétés de l'espace qu'elle nous révèle, une telle étude peut s'imposer par le seul fait qu'elle est susceptible de donner une représentation concrète, simple et commode d'une théorie d'analyse, de mécanique ou même d'arithmétique transcendante. Les correspondances entre êtres algébriques et êtres géométriques abondent dans toutes les branches des mathématiques; lors même qu'elles ne constituent pas un moyen de découverte, elles sont cependant fort utiles en rendant le plus souvent intuitifs tout un ensemble de résultats assez difficiles à établir analytiquement et en permettant de rattacher les unes aux autres certaines propositions dont les rapports n'apparaissaient pas autrement.

La géométrie réglée a été fréquemment utilisée pour de telles représentations. Dans l'étude des fonctions abéliennes, on est amené à considérer une géométrie réglée un peu spéciale, dans laquelle on distingue les éléments de l'espace jouissant de certaines propriétés arithmétiques. A quelques propositions très simples de cette *géométrie réglée arithmétique* on peut rattacher un ensemble considérable de propositions relatives aux fonctions abéliennes et à leurs transformations ainsi qu'à la théorie des nombres algébriques et des formes quadratiques; cela seul suffirait à justifier son étude. En outre, comme on le verra dans cette Note, où nous nous bornerons à énoncer une seule proposition de cette géométrie et à en signaler quelques conséquences immédiates, on est conduit à des résultats intéressants en eux-mêmes; quelques-uns sont probablement nouveaux, et si leur intérêt apparaît surtout lorsqu'on les envisage au point de vue des fonctions et des formes abéliennes, ils sont cependant assez curieux et tout au moins inattendus.

I.

1. Considérons un espace ordinaire dans lequel les coordonnées tétraédriques ou homogènes d'un point sont x_0, x_1, x_2, x_3. D'une façon générale, on définit une droite dans un tel espace à l'aide de six coordonnées homogènes liées par une relation quadratique; le système des coordonnées dépend de l'expression de cette *forme fondamentale* à six variables. Dans ce qui suit, nous adopterons la forme de Plücker et nous définirons une droite (d) par ses six coordonnées pluckériennes p_{ik}: p_{01}, p_{23}, p_{02}, p_{31}, p_{03}, p_{12} liées par la relation

$$\Phi(p_{ik}) = p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{12} = 0.$$

Il serait aisé de reprendre les raisonnements avec d'autres formes fondamentales et de voir l'importance que présente ce point de vue.

Dans ces conditions, les coordonnées x_i de tout point de la droite (d) satisfont aux équations

$$(1)\quad \begin{cases} \quad\quad\quad p_{01}x_1+p_{02}x_2+p_{03}x_3=0, \\ p_{10}x_0 \quad\quad +p_{12}x_2+p_{13}x_3=0, \\ p_{20}x_0+p_{21}x_1 \quad\quad +p_{23}x_3=0, \\ p_{30}x_0+p_{31}x_1+p_{32}x_2 \quad\quad =0. \end{cases}$$

2. Si l'on effectue dans l'espace considéré une substitution homographique ponctuelle :

$$(S)\quad \begin{cases} x_0=a_0X_0+a_1X_1+a_2X_2+a_3X_3, \\ x_1=b_0X_0+b_1X_1+b_2X_2+b_3X_3, \\ x_2=c_0X_0+c_1X_1+c_2X_2+c_3X_3, \\ x_3=d_0X_0+d_1X_1+d_2X_2+d_3X_3, \end{cases}$$

la droite (d) se trouve changée en une autre droite (D) de coordonnées pluckériennes P_{ik}. Cherchons les relations qui existent entre les quantités p_{ik} et P_{ik}, en nous attachant plus particulièrement à l'étude de ces relations, dans le cas où les coefficients a_i, b_i, c_i, d_i de la substitution (S) sont des entiers, les coordonnées p_{ik} étant elles-mêmes entières au sens ordinaire ou même dans un corps algébrique quelconque.

Pour trouver l'expression des quantités P_{ik} en fonction des p_{ik}, il suffit de remplacer dans les équations (1) les x_i par leurs expressions en fonction des X_i, ce qui nous conduit aux équations suivantes de la droite (D)

$$(2)\quad \begin{cases} \sum_{i=0}^{3}(b_ip_{01}+c_ip_{02}+d_ip_{03})X_i=0, \\ \sum_{i=0}^{3}(a_ip_{10}+c_ip_{12}+d_ip_{13})X_i=0, \\ \sum_{i=0}^{3}(a_ip_{20}+b_ip_{21}+d_ip_{23})X_i=0, \\ \sum_{i=0}^{3}(a_ip_{30}+b_ip_{31}+c_ip_{32})X_i=0. \end{cases}$$

Prenons deux quelconques de ces équations, éliminons successivement entre elles X_0, X_1, X_2 et X_3; les équations de (D) se trouvent mises sous la forme

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{lllll} & P_{01}X_1 + & P_{02}X_2 + & P_{03}X_3 & = 0, \\ P_{10}X_0 & & + P_{12}X_2 + & P_{13}X_3 & = 0, \\ P_{20}X_0 + & P_{21}X_1 & & + P_{23}X_3 & = 0, \\ P_{30}X_0 + & P_{31}X_1 + & P_{32}X_2 & & = 0, \end{array}\right.$$

et l'on trouve, en posant pour abréger

$$(mn)_{ij} = m_i n_j - m_j n_i,$$

les expressions suivantes des P_{ik} :

$$\begin{aligned} P_{01} &= (ab)_{01}p_{01} + (cd)_{01}p_{23} + (ac)_{01}p_{02} + (db)_{01}p_{31} + (ad)_{01}p_{03} + (bc)_{01}p_{12}, \\ P_{23} &= (ab)_{23}p_{01} + (cd)_{23}p_{23} + (ac)_{23}p_{02} + (db)_{23}p_{31} + (ad)_{23}p_{03} + (bc)_{23}p_{12}, \\ P_{02} &= (ab)_{02}p_{01} + (cd)_{02}p_{23} + (ac)_{02}p_{02} + (db)_{02}p_{31} + (ad)_{02}p_{03} + (bc)_{02}p_{12}, \\ P_{31} &= (ab)_{31}p_{01} + (cd)_{31}p_{23} + (ac)_{31}p_{02} + (db)_{31}p_{31} + (ad)_{31}p_{03} + (bc)_{31}p_{12}, \\ P_{02} &= (ab)_{03}p_{01} + (cd)_{03}p_{23} + (ac)_{03}p_{02} + (db)_{03}p_{31} + (ad)_{03}p_{03} + (bc)_{03}p_{12}, \\ P_{12} &= (ab)_{12}p_{01} + (cd)_{12}p_{23} + (ac)_{12}p_{02} + (db)_{12}p_{31} + (ad)_{12}p_{03} + (bc)_{12}p_{12}. \end{aligned}$$

Dans le cas où la substitution (S) est une substitution *arithmétique*, c'est-à-dire dans le cas où les coefficients a_i, b_i, c_i, d_i sont entiers, les coefficients figurant dans les relations (R_1) sont également entiers. Si les quantités p_{ik} sont entières dans un corps quadratique quelconque, il en est de même des P_{ik}. En particulier, si la droite (d) a ses coordonnées pluckériennes rationnelles, auquel cas on peut toujours les supposer entières, sa transformée (D) jouit de la même propriété. De telles droites à coordonnées rationnelles seront dites *droites arithmétiques*.

3. Les coordonnées p_{ik} de (d) s'expriment en fonction des coordonnées P_{ik} de (D) par des formules absolument analogues aux relations (R_1).

Pour le voir, il est assez pénible de tirer les p_{ik} des formules (R_1) et de constater les simplifications qui se produisent dans le calcul des coefficients. Aussi, procéderons-nous d'une manière indirecte mais plus rapide en faisant appel à la représentation tangentielle de la droite.

Soient u_0, u_1, u_2, u_3 les coordonnées tangentielles d'un plan quelconque passant par la droite (d); on sait que ces quantités u_i vérifient les équations

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{llll} & \varpi_{01}u_1 + \varpi_{02}u_2 + \varpi_{03}u_3 = 0, \\ \varpi_{10}u_0 & \qquad\qquad + \varpi_{12}u_2 + \varpi_{13}u_3 = 0, \\ \varpi_{20}u_0 + \varpi_{21}u_1 & \qquad\qquad\qquad\qquad + \varpi_{23}u_3 = 0, \\ \varpi_{30}u_0 + \varpi_{31}u_1 + \varpi_{32}u_2 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 0, \end{array}\right.$$

les nombres ϖ_{ik} étant les coordonnées pluckériennes tangentielles de (d); ils sont, comme on sait, liés aux p_{ik} par ces relations

$$(5)\qquad \frac{\varpi_{01}}{p_{23}} = \frac{\varpi_{23}}{p_{01}} = \frac{\varpi_{02}}{p_{31}} = \frac{\varpi_{31}}{p_{02}} = \frac{\varpi_{03}}{p_{12}} = \frac{\varpi_{12}}{p_{03}}.$$

A la substitution (S) effectuée sur les x_i correspond la substitution (Σ) effectuée sur les u_i :

$$(\Sigma)\qquad \left\{\begin{array}{l} U_0 = a_0u_0 + b_0u_1 + c_0u_2 + d_0u_3, \\ U_1 = a_1u_0 + b_1u_1 + c_1u_3 + d_1u_3, \\ U_2 = a_2u_0 + b_2u_1 + c_2u_2 + d_2u_3, \\ U_3 = a_3u_0 + b_3u_1 + c_3u_2 + d_3u_3. \end{array}\right.$$

Soient Π_{ik} les coordonnées pluckériennes tangentielles de (D). La substitution (Σ) faisant passer des U_i aux u_i, tandis que (S) conduisait des x_i aux X_i, le calcul précédent qui nous a fourni les relations (R_1) nous fournit, sans nouveau calcul, les expressions des ϖ_{ik} en fonction des Π_{ik}, par le simple remplacement dans (R_1) de p_{ik} par Π_{ik}, de P_{ik} par ϖ_{ik}, et de chaque quantité a_i, b_i, c_i, d_i par l'élément qui occupe dans le déterminant de (Σ) la place qu'elle occupe dans le déterminant de (S). Il est alors bien facile de remplacer les ϖ_{ik} et Π_{ik} par les p_{ik} et P_{ik} qui leurs sont égaux et d'écrire les expressions des p_{ik} en fonction des P_{ik} :

$$(R_2)\ \left\{\begin{aligned}
p_{01} &= (cd)_{23}P_{01}+(cd)_{01}P_{23}+(cd)_{31}P_{02}+(cd)_{02}P_{31}+(cd)_{12}P_{03}+(cd)_{03}P_{12},\\
p_{23} &= (ab)_{23}P_{01}+(ab)_{01}P_{23}+(ab)_{31}P_{02}+(ab)_{02}P_{31}+(ab)_{12}P_{03}+(ab)_{03}P_{12},\\
p_{02} &= (db)_{23}P_{01}+(db)_{01}P_{23}+(db)_{31}P_{02}+(db)_{02}P_{31}+(db)_{12}P_{03}+(db)_{03}P_{12},\\
p_{31} &= (ac)_{23}P_{01}+(ac)_{01}P_{23}+(ac)_{31}P_{02}+(ac)_{02}P_{31}+(ac)_{12}P_{03}+(ac)_{03}P_{12},\\
p_{03} &= (bc)_{23}P_{01}-(bc)_{01}P_{23}+(bc)_{31}P_{02}+(bc)_{02}P_{31}+(bc)_{12}P_{03}+(bc)_{03}P_{12},\\
p_{12} &= (ad)_{23}P_{01}+(ad)_{01}P_{23}+(ad)_{31}P_{02}+(ad)_{02}P_{31}+(ad)_{12}P_{03}+(ad)_{03}P_{12}.
\end{aligned}\right.$$

Ces formules se prêtent aux mêmes remarques de caractère arithmétique que les formules (R_1).

4. En réalité, si l'on tirait les quantités p_{ik} du système d'équations linéaires (R_1) on n'obtiendrait pas exactement les relations (R_2) mais ces mêmes équations dont tous les coefficients $(mn)_{ij}$ auraient été multipliés par Δ^2, en supposant égal à Δ le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

de la substitution (S). Sous une autre forme, les seconds membres des six équations (R_2) ne sont pas égaux aux nombres p_{ik} tirés de (R_1), mais aux nombres $\frac{1}{\Delta^2}p_{ik}$. Les six coordonnées pluckériennes d'une droite n'étant, en général, définies qu'à un facteur près, on pourra regarder comme entièrement équivalents les systèmes (R_1) et (R_2).

Cependant, il nous arrivera de définir d'une façon précise les *six coordonnées pluckériennes réduites* d'une *droite arithmétique* en assujettissant les six nombres p_{ik} à être six entiers premiers entre eux dans l'ensemble, satisfaisant bien entendu, à la relation fondamentale

$$\Phi(p_{ik}) = p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{12} = 0.$$

Ces coordonnées ne sont ainsi définies qu'au signe près, cette ambiguïté de signe serait bien facile à lever par une convention, par exemple celle-ci : p_{01} positif ou nul; si p_{01} est nul, p_{23} est positif ou nul; si p_{01} et p_{23} sont nuls, p_{02} est positif ou nul; si p_{01}, p_{23} et p_{02} sont nuls, p_{31} est positif ou nul, et ainsi de suite... ; si p_{01}, p_{23}, p_{02}, p_{31} et p_{03} sont nuls, p_{12} est positif.

A toute représentation propre de zéro (satisfaisant à la convention de signe) par la forme $\Phi(p_{ik})$ correspond une droite arithmétique de coordonnées réduites p_{ik}, et à toute droite arithmétique correspond une et une seule représentation propre de zéro par Φ (¹).

Avec ces définitions, les systèmes (R_1) et (R_2) ne donnent pas d'une façon générale les relations qui existent entre les coordonnées pluckériennes réduites d'une droite arithmétique (d) et celles de la droite (D) transformée de (d) par une substitution (S) à coefficients entiers. Mais lorsqu'on ne considère que des substitutions (S) de degré Δ égal à l'unité positive ou négative, ces deux systèmes d'équations conviennent aux coordonnées réduites et sont algébriquement équivalents.

(¹) Dans la suite, il serait entendu qu'on ne considère jamais que des représentations par la forme Φ, qui satisfont à la convention de signe faite sur les p_{ik}. et cette question de signe ne présentant pratiquement aucun intérêt, nous la laisserons de côté.

En effet, on peut considérer les relations de chaque système comme définissant une substitution à six variables et l'on vérifie aisément que les déterminants de (R_1) et (R_2) sont égaux à Δ^3. Si Δ est égal à $\varepsilon = \pm 1$, ces deux déterminants sont égaux à ε, et il est immédiat que : 1° les deux systèmes (R_1) et (R_2) sont entièrement équivalents ; 2° les deux ensembles de six nombres p_{ik} et P_{ik} ont même plus grand commun diviseur et (R_1) et (R_2) donnent les formules de transformation des coordonnées pluckériennes réduites pour les droites arithmétiques.

5. Il est bien facile, d'après ce qui précède, de transporter en géométrie réglée les notions d'équivalence algébrique ou arithmétique.

Deux droites (d) et (D) sont *arithmétiquement équivalentes* si l'une est la transformée de l'autre par une substitution arithmétique (S) de degré $\Delta = \pm 1$, l'équivalence étant *propre* si $\Delta = +1$, *impropre* si $\Delta = -1$. Il est inutile de préciser laquelle des deux droites est la transformée de l'autre dans une substitution arithmétique du premier degré, car il est bien évident que si (S) change (d) en (D), la substitution inverse (S^{-1}) est arithmétique et de degré ± 1 en même temps que (S). et change (D) en (d). Quant aux formules permettant de reconnaître l'équivalence de deux droites définies par leurs six coordonnées, ce sont celles que nous avons données plus haut.

Cette définition de l'équivalence s'étend immédiatement aux divers ensembles de droites (complexes, congruences, séries réglées, etc.).

Dans tout ce qui suit, lorsque nous dirons de deux systèmes réglés qu'ils sont *équivalents*, nous sous-entendrons qu'ils sont arithmétiquement équivalents.

Quand un ensemble de droites (E) sera le transformé d'un autre ensemble de droites (e) par une substitution (S) à coefficients entiers et de degré Δ différent de ± 1, (E) sera dit *équivalent* à (e) *dans une substitution de degré* Δ. Il est nécessaire de préciser dans quel sens a lieu cette équivalence spéciale.

On peut se proposer d'étudier les conditions nécessaires et suffisantes d'équivalence de certains ensembles de droites jouissant de propriétés arithmétiques spéciales. Le problème ainsi posé est très étendu, à cause de l'arbitraire que présente son énoncé. Nous traiterons complètement, dans la suite, l'équivalence des complexes linéaires à coefficients rationnels et nous en donnerons quelques applications.

II.

6. Le plus simple des systèmes réglés qu'on ait à considérer est le complexe linéaire, qui comprend comme cas particulier le complexe linéaire spécial, dont la considération revient à une nouvelle façon d'envisager la droite en la regardant comme axe d'un tel complexe.

Soit

$$(6)\qquad \Sigma a_{ik} p_{ik} = a_{01} p_{01} + a_{23} p_{23} + a_{02} p_{02} + a_{31} p_{31} + a_{03} p_{03} + a_{12} p_{12} = 0$$

l'équation d'un complexe linéaire (c). Nous étudierons principalement le cas des *complexes arithmétiques*, c'est-à-dire le cas où tous les coefficients a_{ik} sont rationnels. On peut les supposer entiers et premiers entre eux dans l'ensemble, ce qui permet de définir les *coefficients réduits* et l'*équation réduite* d'un complexe linéaire arithmétique. Ces coefficients réduits ne sont définis qu'au signe près; on lève cette ambiguïté de signe par une convention particulière, comme on l'a fait pour les coordonnées réduites des droites.

7. Une substitution (S) change le complexe linéaire (c) en un autre complexe linéaire (C) d'équation

$$\Sigma A_{ik} P_{ik} = 0. \tag{7}$$

On obtient cette équation (7) en remplaçant dans l'équation (6) de (c) les quantités p_{ik} par leurs expressions en fonction des quantités P_{ik} données par les relations (R_2).

On trouve ainsi les expressions suivantes des coefficients A_{ik} de (C) en fonction des coefficients a_{ik} de (c) :

$$(R'_1)\quad\left\{\begin{aligned}
A_{01} &= a_{01}(cd)_{23} + a_{23}(ab)_{23} + a_{02}(db)_{23} + a_{31}(ac)_{23} + a_{03}(bc)_{23} + a_{12}(ad)_{23},\\
A_{23} &= a_{01}(cd)_{01} + a_{23}(ab)_{01} + a_{02}(db)_{01} + a_{31}(ac)_{01} + a_{03}(bc)_{01} + a_{12}(ad)_{01},\\
A_{02} &= a_{01}(cd)_{31} + a_{23}(ab)_{31} + a_{02}(db)_{31} + a_{31}(ac)_{31} + a_{03}(bc)_{31} + a_{12}(ad)_{31},\\
A_{31} &= a_{01}(cd)_{02} + a_{23}(ab)_{02} + a_{02}(db)_{02} + a_{31}(ac)_{02} + a_{03}(bc)_{02} + a_{12}(ad)_{02},\\
A_{03} &= a_{01}(cd)_{12} + a_{23}(ab)_{12} + a_{02}(db)_{12} + a_{31}(ac)_{12} + a_{03}(bc)_{12} + a_{12}(ad)_{12},\\
A_{12} &= a_{01}(cd)_{03} + a_{23}(ab)_{03} + a_{02}(db)_{03} + a_{31}(ac)_{03} + a_{03}(bc)_{03} + a_{12}(ad)_{03},
\end{aligned}\right.$$

En substituant de la même manière dans l'équation (7) de (C) aux p_{ik} leurs expressions en fonction des P_{ik}, tirées des relations (R_1) on exprime les coefficients a_{ik} de (c) en fonction des coefficients A_{ik} de (C) par les formules suivantes [1] :

$$(R'_2)\quad\left\{\begin{aligned}
a_{01} &= A_{01}(ab)_{01} + A_{23}(ab)_{23} + A_{02}(ab)_{02} + A_{31}(ab)_{31} + A_{03}(ab)_{03} + A_{12}(ab)_{12},\\
a_{23} &= A_{01}(cd)_{01} + A_{23}(cd)_{23} + A_{02}(cd)_{02} + A_{31}(cd)_{31} + A_{03}(cd)_{03} + A_{12}(cd)_{12},\\
a_{02} &= A_{01}(ac)_{01} + A_{23}(ac)_{23} + A_{02}(ac)_{02} + A_{31}(ac)_{31} + A_{03}(ac)_{03} + A_{12}(ac)_{12},\\
a_{31} &= A_{01}(db)_{01} + A_{23}(db)_{23} + A_{02}(db)_{02} + A_{31}(db)_{31} + A_{03}(db)_{03} + A_{12}(db)_{12},\\
a_{03} &= A_{01}(ad)_{01} + A_{23}(ad)_{23} + A_{02}(ad)_{02} + A_{31}(ad)_{31} + A_{03}(ad)_{03} + A_{12}(ad)_{12},\\
a_{12} &= A_{01}(bc)_{01} + A_{23}(bc)_{23} + A_{02}(bc)_{02} + A_{31}(bc)_{31} + A_{03}(bc)_{03} + A_{12}(bc)_{12}.
\end{aligned}\right.$$

---

[1] Si l'on avait écrit l'équation d'un complexe linéaire sous la

8. Il importe de remarquer que, dans tout ce qui précède, nous considérons les six coefficients d'un complexe linéaire comme six nombres définis à un facteur près et, de même que les systèmes (R_1) et (R_2), les systèmes (R'_1) et (R'_2) ne sont pas entièrement équivalents. Mais on peut, en considérant d'une part des complexes arithmétiques dont l'équation est supposée réduite, d'autre part des substitutions (S) à coefficients entiers et de degré ± 1, préciser les résultats précédents.

Les déterminants de (R'_1) et (R'_2) considérées comme des substitutions à six variables (comparer § 4) sont égaux aux déterminants de (R_1) et (R_2) et égaux à Δ^3, si (S) est de degré Δ. Si l'on tirait des relations (R'_1) les a_{ik} en fonction des A_{ik}, on ne trouverait pas exactement les relations (R'_2), mais ces six équations, après multiplication des seconds membres par Δ^2. Ce qui suit en découle immédiatement. Si (c) est un complexe linéaire arithmétique de coefficients réduits a_{ik}, (C) est aussi un complexe arithmétique; soient a_{ik} ses coefficients réduits. Si l'on ne considère que des substitutions arithmétiques (S) de degré ± 1, les deux systèmes de formules (R'_1) et (R'_2) sont entièrement équivalents et donnent les équations de transformation des coefficients réduits a_{ik} et A_{ik} des complexes arithmétiques.

9. Si le complexe (c) est spécial, c'est-à-dire si l'on a

$$a_{01}a_{23} + a_{02}a_{31} + a_{03}a_{12} = 0,$$

---

forme

$$a_{23}p_{01} + a_{01}p_{23} + a_{31}p_{02} + a_{02}p_{31} + a_{12}p_{03} + a_{03}p_{12} = 0$$

les systèmes (R'_1) et (R'_2) auraient été identiques à (R_2) et (R_1).

(C) l'est également; on vérifie aisément qu'en vertu des relations (R'_1) ou (R'_2), la condition précédente entraîne

$$A_{01}A_{23} + A_{02}A_{31} + A_{03}A_{12} = 0.$$

Les coordonnées pluckériennes p_{ik} et P_{ik} des axes (d) et (D) de ces deux complexes spéciaux sont :

$$\begin{array}{lll} p_{01} = a_{23}, & p_{23} = a_{01}, & p_{02} = a_{31}, \\ p_{31} = a_{02}, & p_{03} = a_{12}, & p_{12} = a_{03} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{lll} P_{01} = A_{23}, & P_{23} = A_{01}, & P_{02} = A_{31}, \\ P_{31} = A_{02}, & P_{03} = A_{12}, & P_{12} = A_{03}. \end{array}$$

Les systèmes (R'_1) et (R'_2) se réduisent, dans ce cas particulier, aux systèmes (R_1) et (R_2) donnant les formules de transformation des droites, qu'on envisage ainsi comme axes des complexes spéciaux.

10. Plus généralement, cherchons les relations qui existent entre les *invariants* des complexes (c) et (C). Considérons les deux quantités

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(c) &= a_{01}a_{23} + a_{02}a_{31} + a_{03}a_{12}, \\ \mathfrak{I}(C) &= A_{01}A_{23} + A_{02}A_{31} + A_{03}A_{12}, \end{aligned}$$

qui sont, d'après Klein, les invariants de (c) et (C). Ces invariants ne sont bien définis qu'autant que les coefficients a_{ik} et A_{ik} le sont eux-mêmes, mais nous pourrons parler avec précision de l'invariant d'un complexe arithmétique, étant entendu que les coefficients figurant dans $\mathfrak{I}$ sont les coefficients réduits (l'ambiguïté de signe de ces coefficients n'intervenant pas dans la valeur de l'invariant). Tout complexe arithmétique a ainsi un invariant bien déterminé qui est un nombre entier quelconque.

Les a_{ik} étant supposés donnés, si les A_{ik} sont ceux que définissent les formules (R'_1), on trouve

$$\mathfrak{I}(C) = \Delta\mathfrak{I}(c),$$

mais si l'on suppose, au contraire, les A_{ik} donnés et les a_{ik} tirés de (R'_2), on trouve que c'est $\mathfrak{I}(c)$ qui est égal à $\Delta\mathfrak{I}(C)$.

Dans tous les cas, si deux complexes arithmétiques sont arithmétiquement équivalents, ils ont même invariant $\mathfrak{I}$, cette proposition ayant, comme nous l'avons montré, un sens très précis. Nous verrons que, réciproquement, deux complexes linéaires arithmétiques de même invariant sont équivalents.

III.

11. Nous démontrerons dans ce Chapitre un certain nombre de propositions qui renferment toute la théorie de l'équivalence des complexes linéaires arithmétiques.

Pour ne pas être obligé de présenter, pour chacune de ces propositions, des discussions arithmétiques toujours ennuyeuses, nous ramènerons les démonstrations à l'application du théorème suivant :

Soient $x_0, y_0, z_0, t_0, x_1, y_1, z_1, t_1$ huit inconnues, le système d'équations (¹)

$$(\mathrm{E}) \qquad \begin{cases} (xy)_{01} = A, & (xz)_{01} = B, & (xt)_{01} = C, \\ (zt)_{01} = \alpha, & (ty)_{01} = \beta, & (yz)_{01} = \gamma, \end{cases}$$

est résoluble en nombres entiers si A, B, C, α, β *et* γ *sont six entiers vérifiant la relation*

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0.$$

(¹) Rappelons que $mn_{ij} = m_i n_j - m_j n_i$.

La nécessité de cette relation résulte de l'identité

$$(xy)_{01}(zt)_{01}+(xz)_{01}(ty)_{01}+(xt)_{01}(yz)_{01}\equiv 0,$$

qui a lieu quelles que soient les valeurs de $x_0, y_0, \ldots, t_1$.

Nous sommes obligés de distinguer plusieurs cas.

Premier cas. — A, B et C ne sont pas tous nuls. Ces trois nombres entiers ont alors un p. g. c. d. bien déterminé δ. Posons

$$x_0=\delta, \qquad x_1=0, \qquad y_1=\frac{A}{\delta}, \qquad z_1=\frac{B}{\delta}, \qquad t_1=\frac{C}{\delta},$$

les équations de rang impair du système (E) sont satisfaites. Il nous reste, pour déterminer y_0, z_0 et t_0, à résoudre en nombres entiers les trois équations de rang pair de (E) qui s'écrivent

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{C}{\delta}z_0-\frac{B}{\delta}t_0&=\alpha,\\ -\frac{C}{\delta}y_0+\frac{A}{\delta}t_0&=\beta,\\ \frac{B}{\delta}y_0-\frac{A}{\delta}z_0&=\gamma. \end{aligned}\right.$$

Ces équations (8), linéaires en y_0, z_0, t_0, sont compatibles ; la troisième est une conséquence des deux autres si l'on tient compte de la relation

$$A\alpha+B\beta+C\gamma=0.$$

Il nous faut prouver que les deux premières sont résolubles en nombres entiers par rapport aux inconnues y_0, z_0, t_0. On sait qu'il suffit pour cela que les deux matrices

$$\begin{Vmatrix} 0 & \frac{C}{\delta} & -\frac{B}{\delta} \\ -\frac{C}{\delta} & 0 & \frac{A}{\delta} \end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix} 0 & \frac{C}{\delta} & -\frac{B}{\delta} & \alpha \\ -\frac{C}{\delta} & 0 & \frac{A}{\delta} & \beta \end{Vmatrix}$$

aient même p. g. d., c'est-à-dire que les valeurs des déterminants à deux lignes et deux colonnes qu'on peut tirer de chacune d'elles aient pour ces deux matrices même p. g. c. d. Le p. g. d. de la première matrice est le p. g. c. d. de

$$\frac{AC}{\delta^2}, \quad \frac{BC}{\delta^2}, \quad \frac{C^2}{\delta^2},$$

il est égal à $\frac{C}{\delta}$ puisque $\frac{A}{\delta}$, $\frac{B}{\delta}$ et $\frac{C}{\delta}$ sont premiers entre eux dans l'ensemble. Le p. g. d. de la seconde matrice est le p. g. c. d. des nombres

$$\frac{AC}{\delta^2}, \quad \frac{BC}{\delta^2}, \quad \frac{C^2}{\delta^2}, \quad \frac{\alpha C}{\delta}, \quad \frac{\beta C}{\delta}, \quad \frac{\alpha A + \beta B}{\delta}.$$

Or, $\frac{\alpha A + \beta B}{\delta}$ étant égal à $-\frac{\gamma C}{\delta}$, ce p. g. c. d. est encore $\frac{C}{\delta}$ et le système (8) est résoluble en nombres entiers.

En particulier si α, β et γ sont nuls, il suffit de poser

$$y_0 = \frac{A}{\delta}, \qquad z_0 = \frac{B}{\delta}, \qquad t_0 = \frac{C}{\delta}.$$

Deuxième cas. — A, B et C sont nuls; α, β et γ ne sont pas tous nuls. Supposons α différent de zéro; α et β ont alors un p. g. c. d. bien déterminé δ. Posons

$$x_0 = x_1 = t_0 = 0, \qquad t_1 = \delta, \qquad y_0 = -\frac{\beta}{\delta}, \qquad z_0 = \frac{\alpha}{\delta}.$$

Pour satisfaire aux équations (E), il suffit de choisir y_1 et z_1 entiers, de manière à vérifier l'équation

$$\frac{\alpha}{\delta} y_1 + \frac{\beta}{\delta} z_1 = \gamma,$$

cela est possible et même d'une infinité de manières, puisque $\frac{\alpha}{\delta}$ et $\frac{\beta}{\delta}$ sont premiers entre eux.

Troisième cas. — A, B, C, α, β et γ sont nuls. Il y a évidemment des solutions entières de (E); ce sont les suivantes :

$$x_0 = m, \quad y_0 = n, \quad z_0 = p, \quad t_0 = q,$$
$$x_1 = km, \quad y_1 = kn, \quad z_1 = kp, \quad t_1 = kq,$$

m, n, p, q et k étant cinq entiers quelconques.

12. Établissons encore la proposition suivante qui sera dans la suite d'un usage constant :

Soient a_i, b_i, c_i, d_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ *les seize coefficients d'une substitution* (S) *quelconque de degré* Δ *et* n *un nombre arbitaire, les relations*

$$(9)\qquad \begin{cases} (ab)_{03} + n(ab)_{12} = a_{01}, \\ (cd)_{03} + n(cd)_{12} = a_{23}, \\ (ac)_{03} + n(ac)_{12} = a_{02}, \\ (db)_{03} + n(db)_{12} = a_{31}, \\ (ad)_{03} + n(ad)_{12} = a_{03}, \\ (bc)_{03} + n(bc)_{12} = a_{12} \end{cases}$$

entraînent

$$a_{01}a_{23} + a_{02}a_{31} + a_{03}a_{12} = n\Delta.$$

Une forme connue de développement d'un déterminant du quatrième degré donne

$$\begin{aligned} \Delta = {} & [(ab)_{03} - (ab)_{12}][(cd)_{03} + (cd)_{12}] \\ & - [(ac)_{03} + (ac)_{12}][(db)_{03} + (db)_{12}] \\ & + [(ad)_{03} + (ad)_{12}][(bc)_{03} + (bc)_{12}] \\ = {} & (ab)_{03}(cd)_{12} + (ab)_{12}(cd)_{03} + (ac)_{03}(db)_{12} + (ac)_{12}(db)_{03} \\ & + (ad)_{03}(bc)_{12} + (ad)_{12}(bc)_{03} \end{aligned}$$

en tenant compte de l'identité

$$(ab)_{ij}(cd)_{ij} + (ac)_{ij}(db)_{ij} + (ad)_{ij}(bc)_{ij} = 0$$

Des relations (9) on tire aisément

$$\begin{aligned} a_{01}a_{23} + a_{02}a_{31} + a_{03}a_{12} = n[& (ab)_{03}(cd)_{12} + \ldots \\ & + (ad)_{12}(bc)_{03}] = n\Delta. \end{aligned}$$

13. La méthode que nous suivrons pour traiter les questions relatives à l'équivalence des complexes linéaires arithmétiques consiste essentiellement à comparer ces complexes aux complexes (K_n) d'équation $p_{03} + np_{12} = 0$, n recevant toutes les valeurs entières. La comparaison directe de deux complexes généraux assujettis seulement à certaines conditions, par exemple : l'égalité des invariants, conduirait à des équations très compliquées. La méthode précédente conduit à des systèmes d'équations simples du type (E) et, par ce moyen, les résultats principaux apparaissent assez simplement.

Nous établirons d'abord la proposition suivante :

Il existe des substitutions arithmétiques (S) *de degré* Δ *changeant le complexe arithmétique* (c) *d'équation réduite*

$$\Sigma a_{ik} p_{ik} = 0,$$

et d'invariant Δ *positif ou négatif dans le complexe* (K_1)

$$P_{03} + P_{12} = 0,$$

et il n'en existe pas de degré moindre.

Si nous nous reportons aux relations (R'_1), nous trouvons que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une substitution (S) change (c) en (K_1) est que ses coefficients a_i, b_i, c_i, d_i vérifient les équations

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} (ab)_{03} + (ab)_{12} &= \lambda a_{01}, \\ (cd)_{03} + (cd)_{12} &= \lambda a_{23}, \\ (ac)_{03} + (ac)_{12} &= \lambda a_{02}, \\ (db)_{03} + (db)_{12} &= \lambda a_{31}, \\ (ad)_{03} + (ad)_{12} &= \lambda a_{03}, \\ (bc)_{03} + (bc)_{12} &= \lambda a_{12}. \end{aligned}\right.$$

Le paramètre λ ne peut qu'être entier. En effet, les premiers membres des équations (10) sont entiers, les a_{ik} sont entiers, donc λ est rationnel et, de plus, toutes les quantités λa_{ik} sont entières. Si $\lambda = \frac{p}{q}$, p et q étant premiers entre eux, q doit diviser tous les a_{ik}; or, ces nombres a_{ik} sont premiers entre eux dans l'ensemble, par conséquent q est égal à l'unité et λ est entier.

Pour résoudre en nombres entiers les équations (10), il suffit de résoudre

$$(11) \quad \begin{cases} (ab)_{03} = \lambda a_{01}, & (cd)_{03} = 0, & (ac)_{03} = \lambda a_{02}, \\ (db)_{03} = 0, & (ad)_{03} = \lambda a_{03}, & (bc)_{03} = 0, \end{cases}$$

$$(12) \quad \begin{cases} (ab)_{12} = 0, & (cd)_{12} = \lambda a_{23}, & (ac)_{12} = 0, \\ (db)_{12} = \lambda a_{31}, & (ad)_{12} = 0, & (bc)_{12} = \lambda a_{12}. \end{cases}$$

Ces deux systèmes (11) et (12) sont des systèmes d'équations du type (E) résolubles en nombres entiers (§ 11).

On en conclut l'existence de substitutions arithmétiques (S) pour toute valeur entière non nulle de λ; le degré de (S) est (§ 12) égal à $\lambda^2 \Delta$. Les substitutions (S) de plus bas degré sont de degré Δ. Il en existe de ce degré ainsi que de tous les degrés multiples de l'invariant Δ du complexe (c) par un carré parfait.

Cas particulier. — Un cas intéressant est celui des complexes (c) d'invariant égal à ± 1.

Le complexe (K_{-1}) d'équation

$$P_{03} - P_{12} = 0$$

est improprement équivalent au complexe (K_1). D'une façon générale :

Tout complexe arithmétique d'invariant $\varepsilon = \pm 1$ *est proprement équivalent au complexe* (K_ε) *et improprement équivalent au complexe* ($K_{-\varepsilon}$).

Sous une autre forme :

Tous les complexes linéaires arithmétiques d'invariant $\varepsilon = \pm 1$ *sont proprement équivalents entre eux et improprement équivalents à tous les complexes d'invariant* $-\varepsilon$.

Nous étendrons cette proposition aux complexes d'invariant quelconque.

14. *Les complexes arithmétiques dont l'invariant est un même nombre premier* n *sont proprement équivalents entre eux.*

Montrons que :

Tout complexe arithmétique (c) *d'équation reduite* $\Sigma a_{ik} p_{ik} = 0$ *et d'invariant* n *premier est équivalent au complexe* (K_n).

Comme nous n'avons en vue que l'équivalence arithmétique, c'est-à-dire l'équivalence dans des substitutions (S) de degré 1, nous pouvons appliquer (§ 8) les formules (R'_1) et (R'_2) telles que nous les avons écrites. Les relations (R'_2) nous montrent immédiatement que la proposition précédente revient à affirmer que le système suivant d'équations (13) est toujours résoluble en nombres entiers par rapport aux inconnues a_i, b_i, c_i et d_i :

$$(13)\qquad \begin{cases} (ab)_{03} + n(ab)_{12} = a_{01}, \\ (cd)_{03} + n(cd)_{12} = a_{23}, \\ (ac)_{03} + n(ac)_{12} = a_{02}, \\ (db)_{03} + n(db)_{12} = a_{31}, \\ (ad)_{03} + n(ad)_{12} = a_{03}, \\ (bc)_{03} + n(bc)_{12} = a_{12}; \end{cases}$$

n n'étant pas nul, les coefficients a_{01}, a_{02} et a_{03} ne sont pas tous nuls, puisque l'invariant

$$a_{01}a_{23}+a_{32}a_{31}+a_{03}a_{12}$$

est égal à n et ils ont un p. g. c. d. δ qui ne peut être égal qu'à 1 ou à n, puisque c'est un diviseur du nombre premier n. Nous sommes ainsi conduits à distinguer deux cas :

1° a_{01}, a_{02} et a_{03} *sont premiers entre eux dans l'ensemble.*

Nous pouvons, dans ce cas, déterminer d'une infinité de manières trois entiers λ, μ, ν vérifiant la relation

$$(14) \qquad \lambda a_{01}+\mu a_{02}+\nu a_{03}=1.$$

Nous pouvons poser

$$a_{23}=\alpha+n\lambda, \qquad a_{31}=\beta+n\mu, \qquad a_{12}=\gamma+n\nu,$$

α, β et γ étant des entiers.

L'équation

$$a_{01}a_{23}+a_{02}a_{31}+a_{03}a_{12}=n$$

nous montre, en tenant compte de (14), que

$$\alpha a_{01}+\beta a_{02}+\gamma a_{03}=0.$$

Les deux systèmes d'équations

$$\begin{array}{ll}
(ab)_{03}=a_{01}, & (ab)_{12}=0, \\
(cd)_{03}=\alpha, & (cd)_{12}=\lambda, \\
(ac)_{03}=a_{02}, & (ac)_{12}=0, \\
(db)_{03}=\beta, & (db)_{12}=\mu, \\
(ad)_{03}=a_{03}, & (ad)_{12}=0, \\
(bc)_{03}=\gamma, & (bc)_{12}=\nu
\end{array}$$

sont deux systèmes du type (E) résolubles en nombres entiers par rapport aux inconnues a_i, b_i, c_i et d_i (§ 11). On en conclut aisément l'existence d'une substitution (S) changeant (c) en (K_n) et dont le degré (§ 12) est égal à 1.

2° *Le p. g. c. d. de* a_{01}, a_{02} *et* a_{03} *est égal à* n.

Les deux systèmes d'équations

$$\begin{array}{ll}
(ab)_{03} = 0, & (ab)_{12} = \dfrac{a_{01}}{n}, \\
(cd)_{03} = a_{23}, & (cd)_{12} = 0, \\
(ac)_{03} = 0, & (ac)_{12} = \dfrac{a_{02}}{n}, \\
(db)_{03} = a_{31}, & (db)_{12} = 0, \\
(ad)_{03} = 0, & (ad)_{12} = \dfrac{a_{03}}{n}, \\
(bc)_{03} = a_{12}, & (bc)_{12} = 0,
\end{array}$$

sont du type (E), résolubles en nombres entiers (§ 11), et leurs solutions donnent des substitutions (S) de degré 1 (§ 12) changeant (c) en (K_n).

15. La même démonstration légèrement modifiée montre que :

Tout complexe arithmétique d'invariant premier n *est improprement équivalent au complexe* (K_{-n}) *et à tout complexe arithmétique d'invariant* $-n$.

16. On démontre de la même manière que :

Il existe des substitutions arithmétiques (S) *de degré* Δ *changeant le complexe arithmétique* (c) *d'invariant* Δn, n *etant un nombre premier, dans le complexe* (K_n). *Il en existe de tous les degrés* $K^2\Delta$, K *étant un entier arbitraire non nul, et il n'en existe pas de degrés autres.*

Les substitutions de plus bas degré sont de degré Δ.

17. Le cas de n quelconque et non pas nécessaire-

ment premier est plus difficile à traiter. Il est cependant aisé de prouver que, parmi les solutions des équations que doivent vérifier les coefficients a_i, b_i, c_i, d_i des substitutions (S) dont on a à prouver l'existence, il y en a qui sont fournies par deux systèmes d'équations du type (E) (§ 11). Considérons, par exemple, la proposition suivante :

Il existe des substitutions arithmétiques (S) *de degré* Δ *changeant le complexe arithmétique* (c) *d'équation réduite* $\Sigma a_{ik} p_{ik} = 0$ *et d'invariant* Δn *dans le complexe* (K_n).

Elle comprend, comme cas particulier, l'équivalence des complexes de même invariant.

L'application des formules (R'_2) et les considérations (§ 12) relatives au degré de (S) montrent qu'on est ramené à prouver la résolubilité en nombres entiers des équations

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} (ab)_{03} - n(ab)_{12} &= a_{01}, \\ (cd)_{03} + n(cd)_{12} &= a_{23}, \\ (ac)_{03} + n(ac)_{12} &= a_{02}, \\ (db)_{03} - n(db)_{12} &= a_{31}, \\ (ad)_{03} + n(ad)_{12} &= a_{03}, \\ (bc)_{03} + n(bc)_{12} &= a_{12}. \end{aligned}\right.$$

Supposons qu'il existe une substitution arithmétique (S) changeant (c) en (K_n) ; nous pouvons poser

$$(16)\quad \left\{\begin{matrix} (ab)_{03} = a'_{01}, & (cd)_{03} = a'_{23}, & (ac)_{03} = a'_{02}, \\ (db)_{03} = a'_{31}, & (ad)_{03} = a'_{03}, & (bc)_{03} = a'_{12}. \end{matrix}\right.$$

$$(17)\quad \left\{\begin{matrix} (ab)_{12} = a''_{01}, & (cd)_{12} = a''_{23}, & (ac)_{12} = a''_{02}, \\ (db)_{12} = a''_{31}, & (ad)_{12} = a''_{03}, & (bc)_{12} = a''_{12}. \end{matrix}\right.$$

Les nombres a'_{ik} et a''_{ik} sont entiers et vérifient les équations

$$(18)\qquad \begin{cases} a'_{01}a'_{23}+a'_{02}a'_{31}+a'_{03}a'_{12}=0, \\ a''_{01}a''_{23}+a''_{02}a''_{31}+a''_{03}a''_{12}=0 \end{cases}$$

et

$$(19)\qquad a'_{01}a''_{23}+a''_{01}a'_{23}+a'_{02}a''_{31} + a''_{02}a'_{31}+a'_{03}a''_{12}+a''_{03}a'_{12}=\Delta.$$

Il existe, par conséquent, douze entiers a'_{ik} et a''_{ik} tels que l'on ait

$$(20)\qquad a_{ik}=a'_{ik}-na''_{ik},$$

les équations (18) et (19) étant vérifiées; la relation (19) n'est d'ailleurs qu'une conséquence directe de l'hypothèse faite sur l'invariant de (c) d'être égal à Δn.

Inversement, si l'on peut déterminer douze entiers a'_{ik} et a''_{ik} vérifiant les équations (18) et (20), les systèmes d'équations (15) et (17) sont du type (E), résolubles en nombres entiers (§ **11**), le système (13) a donc des solutions entières et l'équivalence de (c) et de (K_n) se trouve établie.

Par conséquent :

La condition nécessaire et suffisante pour que le complexe arithmétique (c) d'équation réduite $\Sigma a_{ik}p_{ik}=0$ et d'invariant $n\Delta$ soit équivalent dans une substitution de degré Δ au complexe (K_n), est qu'on puisse trouver douze entiers a'_{ik} et a''_{ik} vérifiant les équations

$$a_{ik}=a'_{ik}+na''_{ik},$$
$$a'_{01}a'_{23}+a'_{02}a'_{31}+a'_{03}a'_{12}=0,$$
$$a''_{01}a''_{23}+a''_{02}a''_{31}+a''_{03}a''_{12}=0.$$

Le théorème de géométrie que nous voulons établir est donc entièrement équivalent à cette proposition d'arithmétique :

Soient a_{ik} : a_{01}, a_{23}, a_{02}, a_{31}, a_{03}, a_{12}, six nombres *entiers donnant une représentation propre de $n\Delta$ par la forme*

$$\Phi(a_{ik}) = a_{01}a_{23} + a_{02}a_{31} + a_{03}a_{12},$$

n et Δ étant deux entiers quelconques. On peut poser

$$a_{ik} = a'_{ik} + na''_{ik},$$

de manière que les six nombres a'_{ik} d'une part, les six nombres a''_{ik} d'autre part, fournissent une représentation propre de zéro par la forme Φ.

Les théorèmes précédents (§ 13, 14, 15 et 16) prouvent que cette proposition est exacte pour n égal à l'unité ou même pour n premier. Au fond, ils ont été démontrés par la voie que nous suivons maintenant en effectuant cette décomposition de toute représentation propre de $n\Delta$ par Φ en une somme de deux représentations de zéro par la même forme.

18. Pour éviter toute difficulté dans ce cas où n est quelconque, nous utiliserons le résultat suivant : tout complexe linéaire arithmétique est équivalent à un complexe arithmétique de même invariant dont les coefficients a_{01} et a_{23} sont nuls. C'est un cas particulier d'une proposition plus générale que nous avons établie ailleurs, à propos de recherches sur les fonctions abéliennes [1].

Nous n'avons ainsi qu'à démontrer le résultat annoncé que dans le cas où a_{01} et a_{23} sont nuls, cas où il est à peu près évident, ce qui nous évitera de nouveaux raisonnements arithmétiques.

---

[1] *Les fonctions abéliennes et la théorie des nombres*, 1re Partie, Chap. III, § 3 (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1912).

En effet, si a_{01} et a_{23} sont nuls, a_{02}, a_{31}, a_{03} et a_{12} étant premiers entre eux, on peut d'une infinité de manières déterminer quatre entiers a''_{02}, a''_{31}, a''_{12} et a''_{03} vérifiant l'équation

$$a_{02}a''_{31} + a_{31}a''_{02} + a_{03}a''_{12} + a_{12}a''_{03} = \Delta,$$

ces entiers étant choisis, il est bien facile d'en trouver deux autres, a''_{01} et a''_{23}, tels que

$$a''_{01}a''_{23} = -(a''_{02}a''_{31} + a''_{03}a''_{12}).$$

Les a''_{ik} étant déterminés, les a'_{ik} le sont par les relations

$$a'_{ik} = a_{ik} - na''_{ik},$$

et l'on vérifie aisément que les entiers a'_{ik} et a''_{ik} satisfont à toutes les conditions imposées.

19. On en conclut du même coup l'exactitude des deux propositions (§ 17) géométrique et arithmétique. C'est un fait général et des raisonnements simples du genre des précédents permettent d'énoncer de nombreuses propositions d'arithmétique, conséquences des précédentes, et qui conduisent aux propriétés de la forme Φ. Nous en donnerons seulement deux exemples de nature différente :

1° De la proposition relative à l'équivalence des complexes de même invariant, on déduit que :

Étant données deux représentations propres a_{ik} et A_{ik} d'un même nombre par la forme Φ, on peut toujours passer de l'une à l'autre par une substitution du premier degré à six variables du type (R'_1) *ou* (R'_2).

Ces substitutions (R') ne dépendent que de seize entiers. On peut énoncer ce théorème :

Étant donnée une représentation propre a_{ik} du nombre entier n par la forme Φ, on en déduit toutes les autres représentations propres de n par Φ et celles-là seulement par les formules (R'_1) où a_i, b_i, c_i, d_i sont seize entiers assujettis seulement à rendre égal à l'unité le déterminant de (R'_1).

2° Donnons un exemple où interviennent les systèmes d'équation du type (E).

Il est bien évident qu'on peut toujours trouver un complexe arithmétique (C) équivalent à un complexe (c), de coefficients réduits a_{ik}, tel que les coefficients a_{03} et a_{12} de (C) par exemple aient des valeurs entières arbitraires p et q. En raisonnant comme nous l'avons fait (§ 17) on en conclut que :

Étant donnés deux nombres entiers quelconques p et q, on peut toujours trouver deux représentations $(x_0, x_1, y_0, y_1, z_0, z_1)$ et $(x'_0, x'_1, y'_0, y'_1, z'_0, z'_1)$ de ces nombres par la forme linéaire à six variables

$$a_{01}x_0 + a_{23}x_1 + a_{02}y_0 + a_{31}y_1 + a_{03}z_0 + a_{12}z_1,$$

dont les six coefficients a_{ik} sont supposés premiers entre eux dans l'ensemble, telles que $(x_0, x_1, y_0, y_1, z_0, z_1)$ et $(x'_0, x'_1, y'_0, y'_1, z'_0, z'_1)$ fournissent une représentation propre de zéro par la forme $\Phi \equiv X_0X_1 + Y_0Y_1 + Z_0Z_1$, $[(x_0 + x'_0), (x_1 + x'_1), (y_0 + y'_0), (y_1 + y'_1), (z_0 + z'_0), (z_1 + z'_1)]$ donnant une représentation de l'unité par cette même forme Φ; c'est-à-dire telles qu'on ait

$$x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1 = 0,$$
$$x'_0x'_1 + y'_0y'_1 + z'_0z'_1 = 0,$$
$$(x_0 + x'_0)(x_1 + x'_1) + (y_0 + y'_0)(y_1 + y'_1) + (z_0 + z'_0)(z_1 + z'_1) = 1.$$

20. Pour achever l'étude de l'équivalence des complexes arithmétiques, il nous reste à déterminer les substitutions permettant de passer d'un complexe arithmétique quelconque (c) d'invariant n à un autre complexe arithmétique quelconque (C) d'invariant N.

Nous savons trouver une substitution arithmétique Σ de degré 1 changeant (c) en (K_n) de même invariant et une substitution également du premier degré Σ' changeant (K_N) en (C). Désignons par S toute substitution (S) arithmétique de degré Δ changeant (K_n) en (K_N); les substitutions $\Sigma S \Sigma'$ sont de degré Δ, changent (c) en (C) et sont les seules substitutions arithmétiques jouissant de ces deux propriétés. Nous sommes ainsi ramenés à la recherche des substitutions changeant (K_n) en (K_N).

L'application des formules générales (R'_1) et R'_2) donne immédiatement les relations nécessaires et suffisantes qui existent entre les coefficients a_i, b_i, c_i et d_i d'une substitution (S) changeant (K_n) en (K_N). Ces relations sont celles de l'un ou l'autre des deux systèmes suivants d'équations qui sont entièrement équivalents :

$$(R'_1)\quad\left\{\begin{aligned}
(ab)_{03} + N(ab)_{12} &= 0,\\
(cd)_{03} + N(cd)_{12} &= 0,\\
(ac)_{03} + N(ac)_{12} &= 0,\\
(db)_{03} + N(db)_{12} &= 0,\\
(bc)_{03} + N(bc)_{12} = n[(ad)_{03} + N(ad)_{12}] &= \mathfrak{M};
\end{aligned}\right.$$

$$(R'_2)\quad\left\{\begin{aligned}
n(ad)_{01} + (bc)_{01} &= 0,\\
n(ad)_{23} + (bc)_{23} &= 0,\\
n(ad)_{02} + (bc)_{02} &= 0,\\
n(ad)_{31} + (bc)_{31} &= 0,\\
n(ad)_{03} + (bc)_{03} = N[n(ad)_{12} + (bc)_{12}] &= \mathfrak{M}.
\end{aligned}\right.$$

$\mathfrak{M}$ est nécessairement multiple de n et de N. D'ailleurs $\mathfrak{M}$ étant ainsi choisi multiple quelconque de n et de N, il existe des substitutions (S) dont les coefficients vérifient les relations ci-dessus écrites. Leur degré (§ 12) est égal à $\frac{\mathfrak{M}^2}{Nn}$.

Soit δ le p. g. c. d. de N et n et soit

$$n = n'\delta, \qquad N = N'\delta.$$

$\mathfrak{M}$ multiple de n et de N est de la forme $K\delta N'n'$, K étant un entier quelconque. Le degré de (S) est égal à $\frac{K^2\delta^2N'^2n'^2}{\delta^2N'n'} = K^2N'n'$. A chaque valeur de K correspondent des substitutions (S) changeant (K_n) en (K_N) et les substitutions de plus bas degré sont de degré $n'N'$. Si n et N sont premiers entre eux, elles sont de degré nN. n et N étant deux entiers quelconques, ces résultats s'étendent aux substitutions changeant (K_N) en (K_n). Finalement :

Deux complexes arithmétiques d'invariants n et N *sont équivalents dans des substitutions de degré $n'N'$, n' et N' étant les quotients de n et de* N *par leur p. g. c. d. D'une façon générale,* K *désignant un entier arbitraire, toutes les substitutions changeant l'un quelconque des deux complexes en l'autre sont de degré $K^2N'n'$ et il en existe de tous ces degrés correspondant aux diverses valeurs entières de* K.

La détermination effective de ces substitutions résulte des considérations précédentes.

Nous réservons pour le moment l'étude des substitutions automorphes d'un complexe linéaire, c'est-à-dire des substitutions le laissant inaltéré.

21. Jusqu'à présent nous n'avons pas considéré les complexes spéciaux et il nous reste à étudier l'équivalence de ces complexes spéciaux, c'est-à-dire des droites arithmétiques.

Toutes les droites arithmétiques sont équivalentes entre elles arithmétiquement et même dans les substitutions de tous les degrés.

Autrement :

Taus les complexes spéciaux sont équivalents entre eux arithmétiquement et dans des substitutions de tous les degrés.

Conformément à la méthode que nous avons suivie, nous montrerons que tout complexe arithmétique spécial d'axe (d) est équivalent au complexe spécial (K_0), c'est-à-dire au complexe dont l'axe est la droite (D_0) dont toutes les coordonnées p_{ik} sont nulles sauf $p_{12} = 1$.

L'application des formules (R_1) et (R_2) donne immédiatement les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une substitution (S) change la droite (d) de coordonnées p_{ik} en (D_0). Ce sont les suivantes :

$$(20)\quad \begin{cases} (cd)_{03} = p_{01}, & (ab)_{03} = p_{23}, & (db)_{03} = p_{02}, \\ (ac)_{03} = p_{31}, & (bc)_{03} = p_{03}, & (ad)_{03} = p_{12}. \end{cases}$$

Si le degré Δ de (S) est fixé, il faut en outre que si l'on pose

$$\begin{array}{lll} (cd)_{12} = \alpha_{23}, & (ab)_{12} = \alpha_{01}, & (db)_{32} = \alpha_{31}, \\ (ac)_{12} = \alpha_{02}, & (bc)_{12} = \alpha_{12}, & (ad)_{12} = \alpha_{03}, \end{array}$$

on ait d'abord la relation

$$\alpha_{01}\alpha_{23} + \alpha_{02}\alpha_{31} + \alpha_{03}\alpha_{12} = 0$$

et ensuite

$$\Sigma\alpha_{ik}p_{ik} = \Delta.$$

Tout revient à déterminer les α_{ik}, car ensuite la détermination des coefficients de (S) est ramenée à la résolution en nombres entiers de deux systèmes du type (E) (§ 11). Comme pour les complexes non spéciaux la proposition géométrique se ramène à un théorème d'arithmétique :

Étant donnée une représentation propre p_{ik} de zéro par la forme Φ, on peut trouver une autre représentation de zéro par Φ telle que $\Sigma a_{ik} p_{ik}$ soit égal à un nombre entier quelconque Δ.

Ce théorème est évident lorsque p_{01}, p_{02} et p_{03} sont nuls. Or une droite arithmétique contient une infinité de points arithmétiques (points à coordonnées entières); les points arithmétiques sont équivalents entre eux et en particulier équivalents au point (1, 0, 0, 0). Donc, toute droite arithmétique est équivalente à une droite arithmétique passant par ce dernier point, droite dont les coordonnées p_{01}, p_{02} et p_{03} sont nulles.

La démonstration de la proposition précédente est ainsi ramenée au cas où elle est évidente.

Remarque. — Ce théorème permet de compléter les résultats (§ 19) relatifs aux propriétés de la forme Φ en ce qui concerne les représentations de zéro par cette forme, et il est susceptible d'applications arithmétiques analogues à celles que nous avons données.

(*A suivre.*)