NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉMILE TURRIÈRE

Sur une congruence de droites associée au réseau conjugué d'une surface, orthogonal en projection sur un plan

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 163-176

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__163_1>

[$O^1 7a$]

SUR UNE CONGRUENCE DE DROITES ASSOCIÉE AU RESEAU CONJUGUÉ D'UNE SURFACE, ORTHOGONAL EN PROJECTION SUR UN PLAN;

PAR M. EMILE TURRIERE.

1. Pour les personnes qui s'occupent de Geométrie, il y a certainement grand intérêt à étudier les diverses questions que Ribaucour a proposées dans les *Nouvelles Annales* et autres Recueils : elles donnent lieu à des remarques parfois importantes. Ainsi, bien que les questions 975 et 1053 des *Nouvelles Annales* paraissent de prime abord tout à fait différentes l'une de l'autre, j'ai pu établir entre elles une corrélation remarquable, qui mérite d'être signalée.

Je rappelle les énoncés de ces deux questions :

Question 975. (*Nouvelles Annales*, 1869, p. 563) : *Etant donnés une surface du second ordre et un plan quelconque, trouver sur cette surface un réseau conjugué se projetant sur le plan donné suivant un réseau orthogonal.*

Question 1053. (*Nouvelles Annales*, 1871, p. 558) :

Trouver une surface (M) *telle qu'en abaissant d'un point* M *de* (M) *une perpendiculaire* MP *sur un plan* (P) *et en menant par* P *une parallèle* PN *à la normale en* M *à* (M), *les droites ainsi obtenues soient normales à une surface.*

Je me suis déjà occupé de la question 975 dans deux récents articles, publiés l'un dans le *Bulletin de la Société mathématique* (t. XL, 1912, p. 228-238) et l'autre dans les *Nouvelles Annales* (4[e] série, t. XII, août 1912).

2. Soient trois axes coordonnés rectangulaires $O(x\,y\,z)$; l'axe Oz est supposé vertical. Étant donnée une surface réelle (S), qui n'est pas un cylindre vertical, soit M un quelconque de ses points, de coordonnées x, y, z; soient p, q, r, s, t les dérivées des deux premiers ordres de la cote z par rapport à x et à y; soit m la projection de M sur le plan horizontal Oxy. Par ce point m je mène la droite d d'équations

$$\begin{aligned} X &= x - pZ, \\ Y &= y - qZ; \end{aligned}$$

cette droite est la parallèle à la normale à la surface au point M.

Les droites d constituent une congruence (Γ) associée à la surface (S).

L'équation différentielle qui définit les séries développables de cette congruence (Γ) est

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dy},$$

ou

$$s(dy^2 - dx^2) + (r - t)\,dx\,dy = 0;$$

cette équation différentielle définit sur la surface (S) un réseau de courbes que j'ai étudiées dans les deux articles cités plus haut. J'ai établi que, sur toute surface (S) qui n'est pas un paraboloïde de révolution d'axe vertical, il existe un réseau réel formé par des courbes (C) qui sont conjuguées sur la surface (S) et qui se projettent horizontalement suivant un réseau orthogonal ; l'équation différentielle de ce réseau (C) est précisément l'équation différentielle précédente.

3. Lorsque la surface (S) est telle que $r-t$ et s sont des quantités simultanément nulles, c'est-à-dire lorsque cette surface est un paraboloïde de révolution d'axe vertical, l'équation différentielle est indéterminée. J'ai établi que, dans ce cas singulier, tout réseau conjugué de ce paraboloïde se projette suivant un réseau orthogonal. Dans ce cas d'exception, il est toujours permis de prendre pour axe Oz l'axe de révolution du paraboloïde ; l'équation de celui-ci est alors

$$z = \frac{x^2+y^2}{2a};$$

les équations de la droite d deviennent

$$X = x\left(1-\frac{Z}{a}\right),$$
$$Y = y\left(1-\frac{Z}{a}\right);$$

la congruence (Γ) associée au paraboloïde de révolution est donc formée par les droites émanant d'un point fixe de coordonnées

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = a;$$

Cette propriété résulte de ce que la sous-normale de la parabole est constante. Puisque la congruence (Γ) est alors constituée par les droites issues d'un point fixe, toutes les séries réglées de cette congruence sont évidemment développables.

Des considérations qui précèdent il résulte donc *qu'il y a équivalence entre le problème qui consiste à déterminer sur* (S) *le réseau conjugué qui se projette horizontalement suivant un réseau orthogonal et celui qui consiste à déterminer les séries développables de la congruence* (Γ) *associée à la surface* (S).

Dans ces conditions, il est manifeste que les deux questions 975 et 1053, posées respectivement en 1869 et en 1871, se rattachent à un même ensemble de recherches inédites de Ribaucour.

4. Les congruences (Γ) me paraissent donc mériter une étude particulière : ce sera l'objet de la suite du présent article.

Toute congruence de droites définie par les équations

$$X = x - AZ,$$
$$Y = y - BZ,$$

dans lesquelles A et B sont deux fonctions arbitraires des variables x et y, ne peut être envisagée comme une congruence (Γ) particulière. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les deux fonctions A et B satisfassent à la condition

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x};$$

lorsque cette condition est remplie, il existe une fonction z, définie à une constante additive près, dont A et B sont les deux dérivées partielles du premier ordre. Cette fonction z caractérise une surface, qui est la surface (S) associée à la congruence (Γ). D'après ce qui précède, la surface (S) est complètement déterminée, à une translation près de direction Oz.

5. Les équations des plans focaux de la congruence (Γ) associée à une surface (S) s'obtiennent en remplaçant dans l'équation

$$(Y + qZ - y) + \lambda(X + pZ - x) = 0,$$

λ par l'une ou l'autre des racines de l'équation du second degré

$$\lambda^2 + \frac{r-t}{s}\lambda - 1 = 0:$$

ces racines sont toujours réelles et distinctes : de même que les congruences de normales, les congruences (Γ) admettent donc toujours des nappes réelles de surface focale.

En écrivant que les deux plans focaux sont rectangulaires, on obtient la condition

$$pq(r-t) = (p^2 - q^2)s;$$

cette équation aux dérivées partielles du second ordre caractérise les surfaces moulures attachées aux cylindres verticaux. *La condition nécessaire et suffisante pour que la congruence* (Γ) *soit une congruence de normales est donc que la surface associée* (S) *soit une surface moulure attachée à un cylindre vertical.*

Ce résultat peut être encore établi directement ainsi que l'a fait M. Pellet, dans sa solution de la question 1053, publiée par les *Nouvelles Annales* de 1874 (p. 440); il faut que l'expression

$$p\sqrt{p^2 + q^2 + 1}\,dx + q\sqrt{p^2 + q^2 + 1}\,dy,$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{p^2 + q^2 + 1}\,dz,$$

soit une différentielle exacte ; il faut donc que $p^2 + q^2$ soit une fonction de z, c'est-à-dire que la surface (S) soit une surface moulure. L'équation aux dérivées partielles du second ordre précédemment écrite n'est autre que l'équation obtenue en égalant à zéro le déterminant fonctionnel de z et de $p^2 + q^2$.

La Géométrie pure permet d'ailleurs d'obtenir le même résultat et de définir simplement les surfaces parallèles qui sont les trajectoires orthogonales de la congruence de normales. Les développables de la congruence (Γ) tracent, en effet, un réseau orthogonal [le réseau (C) projeté] sur le plan Oxy : les plans focaux d'une congruence (Γ) de normales doivent donc être rectangulaires entre eux et découper un angle droit dans le plan Oxy, qui est supposé horizontal. De cette double condition il résulte que l'un des deux plans focaux doit être vertical. La congruence (Γ) est formée par les normales d'une famille de surfaces moulures ; la surface (S) doit donc être elle-même une surface moulure attachée au même cylindre.

6. L'équation du second degré qui définit les cotes Z_1 et Z_2 des deux foyers du rayon d de la congruence générale (Γ) est

$$(rt - s^2)Z^2 - (r + t)Z + 1 = 0;$$

cette équation a toujours deux racines réelles, distinctes en général : ce n'est que dans le cas singulier du paragraphe 3 que les deux foyers sont confondus.

Si la surface (S) est développable, l'un des foyers F_2 est à l'infini ; l'autre est toujours à distance finie (la surface étant réelle) et a pour cote

$$Z_1 = \frac{1}{r + t}.$$

Ce cas étant excepté, les deux foyers toujours réels sont à distance finie; leurs cotes satisfont aux deux relations

$$\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = r + t,$$

$$\frac{1}{Z_1 Z_2} = rt - s^2.$$

Dans les deux articles cités, j'ai mis en évidence de nombreuses analogies des lignes (C) de la surface (S) et des lignes de courbure. On peut considérer l'équation

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dy}$$

comme rappelant les formules d'Olinde Rodrigues ; si l'on pose

$$dx = Z\,dp,$$
$$dy = Z\,dq,$$

l'élimination de dx et dy, entre les équations linéaires et homogènes obtenues, donne une équation du second degré en Z

$$Z^2(rt - s^2) - (r + t)Z + 1 = 0,$$

qui est celle des cotes des points focaux. Pour rendre l'analogie plus profonde, introduisons les distances ρ_1, ρ_2 du point de départ m du rayon aux deux foyers F_1 et F_2 ; c'est-à-dire posons

$$\rho_1 = Z_1\sqrt{1 + p^2 + q^2}, \qquad \rho_2 = Z_2\sqrt{1 + p^2 + q^2};$$

on obtient ainsi

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{r + t}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2} = \frac{rt - s^2}{1 + p^2 + q^2};$$

ces deux quantités sont analogues à la courbure moyenne et à la courbure totale de la surface (S).

7. De la première de ces deux formules il résulte que les surfaces intégrales de l'équation de Laplace

$$r + t = 0$$

sont analogues aux surfaces minima. Pour une surface minima générale, les asymptotiques sont orthogonales dans l'espace ; pour une surface intégrale de l'équation de Laplace, les asymptotiques sont orthogonales en projection sur un plan horizontal.

Lorsque la surface (S) est une surface intégrale de l'équation de Laplace, les cotes des foyers satisfont à la relation

$$Z_1 + Z_2 = 0;$$

le point de départ est donc le point m. Ainsi *pour que la congruence* (Γ) *admette le plan* Oxy *pour surface médiane, il faut et il suffit que la surface* (S) *soit une surface intégrale de l'équation de Laplace.*

J'ai déterminé le réseau (C) d'une surface de cette nature, dans l'article cité et inséré dans les *Nouvelles Annales.*

Plus généralement, cherchons quelle doit être la surface (S) pour que la surface médiane de la congruence associée (Γ) soit un plan horizontal. Prenons le plan d'équation

$$z = \frac{1}{2}a:$$

on doit avoir

$$Z_1 + Z_2 = a;$$

la surface (S) est donc l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles de second ordre

$$\frac{rt - s^2}{r + t} = a,$$

c'est-à-dire

$$\left(r - \frac{1}{a}\right)\left(t - \frac{1}{a}\right) = s^2 + \frac{1}{a^2}.$$

Pour intégrer cette équation, posons

$$z = z_1 + \frac{x^2 + y^2}{2a};$$

elle devient

$$r_1 t_1 - s_1^2 = \frac{1}{a^2},$$

c'est-à-dire l'équation qu'on rencontre fréquemment en Physique mathématique et en Géométrie et qu'on désigne habituellement sous le nom d'*équation de la théorie de la chaleur*. Ainsi donc :

Pour que la congruence (Γ) *admette pour surface médiane un plan horizontal, il faut et il suffit que la surface associée* (S) *soit la surface diamétrale, pour les cordes verticales, d'une intégrale de l'équation de la théorie de la chaleur et du paraboloïde de révolution d'axe vertical qui est intégrale particulière de cette équation.*

On peut exprimer les coordonnées x, y, z d'un point quelconque de la surface (S) en utilisant les expressions que donne M. Darboux à la page 273 du troisième Tome de ses *Leçons sur la théorie des surfaces :* on a

$$\frac{ix_1}{a} = V' - U',$$
$$\frac{iy_1}{a} = u - v,$$
$$\frac{iz_1}{a} = (u + v)(V' - U') + 2U - 2V,$$

formules qui sont prolongées par les suivantes

$$p = u + v,$$
$$q = U' + V';$$

l'équation du réseau (C),

$$dp\,dy - dq\,dx = 0,$$

devient alors

$$(1 + U''^2)\,du^2 = (1 + V''^2)\,dv^2,$$

d'où les lignes (C) par deux quadratures

$$\int \sqrt{1 + U''^2}\,du \pm \int \sqrt{1 + V''^2}\,dv = \text{const.}$$

Telles sont les projections des lignes (C) des surfaces intégrales de l'équation

$$rt - s^2 = \frac{1}{a^2},$$

et, par conséquent, des surfaces (S) associées à une congruence (Γ) dont la surface médiane est un plan horizontal.

8. Une transformation analogue permet de définir la surface (S) la plus générale pour laquelle une nappe de la surface focale de la congruence (Γ) associée à (S) est réduite à une courbe plane, située dans un plan horizontal. Soit $z = a$ l'équation de ce plan. L'équation aux cotes des foyers doit admettre a pour racine ; la surface (S) est donc l'intégrale générale de l'équation de Monge-Ampère

$$\left(r - \frac{1}{a}\right)\left(t - \frac{1}{a}\right) - s^2 = 0;$$

la transformation

$$z = z_1 + \frac{x^2 + y^2}{2a}$$

la change en l'équation des surfaces développables

$$r_1 t_1 - s_1^2 = 0.$$

Par conséquent, *la surface* (S) *la plus générale pour laquelle une nappe de la surface focale de la congruence associée* (Γ) *est une courbe plane, située dans un plan horizontal, est la surface diamétrale, pour des cordes verticales, du paraboloïde de révolution d'axe vertical et d'une surface développable arbitraire.*

La surface diamétrale précédente peut être évidemment remplacée par la surface lieu des points qui divisent, dans un rapport constant donné, les cordes verticales, limitées à une développable particulière et au paraboloïde de révolution.

Toutes ces surfaces associées à une développable admettent pour réseau (C) projeté celui de la surface développable elle-même. Dans le cas d'une surface développable, le réseau (C) projeté comprend les courbes d'équation

$$dp = 0,$$

c'est-à-dire les projections des génératrices. De même que, sur la surface développable, les lignes de courbure sont constituées par les génératrices et leurs trajectoires orthogonales, de même les lignes (C)-projetées sont constituées par les projections des génératrices et les développantes de la projection de l'arête de rebroussement.

9. Les surfaces (S), réglées et à plan directeur horizontal, sont caractérisées par la propriété suivante des congruences (Γ). On sait qu'on désigne sous le nom de surface centrale d'une congruence de droites la surface qui est l'enveloppe du plan perpendiculaire à tout rayon au milieu du segment focal. Le plan perpendiculaire au rayon, au point de départ m de ce rayon

enveloppe de même une certaine surface (Σ) : le plan a pour équation

$$(X-x)p+(Y-y)q=Z;$$

les coordonnées du point de contact de ce plan avec son enveloppe (Σ) s'obtiennent en adjoignant à l'équation précédente les deux équations obtenues par dérivations partielles

$$(X-x)r+(Y-y)s=p,$$
$$(X-x)s+(Y-y)t=q;$$

les coordonnées de ce point de contact sont donc

$$X=x+\frac{pt-qs}{rt-s^2},$$

$$Y=y+\frac{qr-ps}{rt-s^2},$$

$$Z=\frac{p^2t-2pqs+q^2r}{rt-s^2};$$

imposons la condition $Z=0$: la surface (Σ) dégénère alors en une courbe du plan Oxy et réciproquement. La surface (S) la plus générale pour laquelle cette circonstance se présente est intégrale de l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$p^2t-2pqs+q^2r=0;$$

cette équation caractérise les surfaces réglées à plan directeur horizontal.

La surface (Σ) est généralement distincte de la surface centrale de la congruence (Γ) : ce n'est que pour les congruences (Γ) associées à une surface (S) intégrale de l'équation de Laplace qu'il y aura identité entre ces deux surfaces. On sait, d'après Meusnier, que la seule surface qui satisfait simultanément aux deux équations

$$r + t = 0,$$
$$p^2 t - 2pqs + q^2 r = 0,$$

est l'hélicoïde gauche à plan directeur. Dans le cas où la surface (S) est de cette nature, il résulte des considérations précédentes que la congruence (Γ) associée à cet hélicoïde admet le plan Oxy pour surface médiane et une certaine courbe de ce plan pour surface centrale. Cette courbe est réduite à un point : lorsque (S) est un conoïde d'équation

$$z = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

la relation

$$px + qy = 0$$

exprime en effet que la surface (Σ) associée est l'origine O des axes coordonnés. Il en est ainsi, en particulier, pour l'hélicoïde (S) d'équation

$$z = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}.$$

10. En introduisant les coordonnées polaires par les formules

$$x = \rho \cos\omega, \qquad y = \rho \sin\omega, \qquad z = \omega,$$

les équations de la congruence (Γ) associée à l'hélicoïde gauche à plan directeur sont

$$X = \rho \cos\omega + \frac{\sin\omega}{\rho} Z,$$
$$Y = \rho \sin\omega - \frac{\cos\omega}{\rho} Z:$$

l'équation des cotes des foyers est

$$Z^2 - \rho^4 = 0,$$

d'où

$$Z_1 = \rho^2,$$
$$Z_2 = -\rho^2;$$

les nappes de la surface focale de cette congruence sont deux paraboloïdes de révolution d'équations respectives

$$x^2 + y^2 - 2z = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2z = 0;$$

cette congruence (Γ) est de révolution autour de l'axe Oz; elle est définie par le complexe linéaire d'équation

$$p_3 = p_6$$

et par le complexe des droites équidistantes de deux points A, B de l'axe Oz, extrémités d'un segment de milieu O.