NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P. MAGRON

Sur le point de Frégier dans l'hyperbole

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 145-149

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__145_0>

[L¹5a]

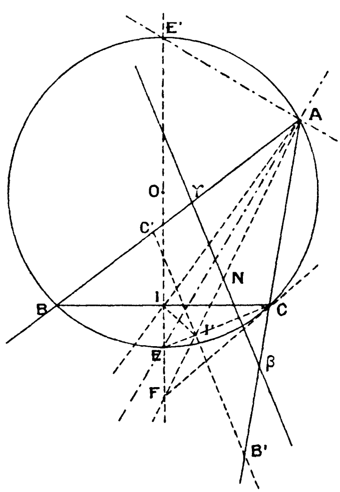
SUR LE POINT DE FRÉGIER DANS L'HYPERBOLE;

PAR M. P. MAGRON,
Professeur au Lycée de Troyes.

THÉORÈME. — *Étant donnée une hyperbole* (H) *d'asymptotes* AB, AC *passant en* I, *où elle admet pour tangente* BC, *le point de Frégier relatif à* I *est le pôle de* BC *par rapport au cercle* ABC.

En effet, le point F est sur la perpendiculaire à BC en son milieu I (*fig.* 1) et sur la droite symétrique

Fig. 1.

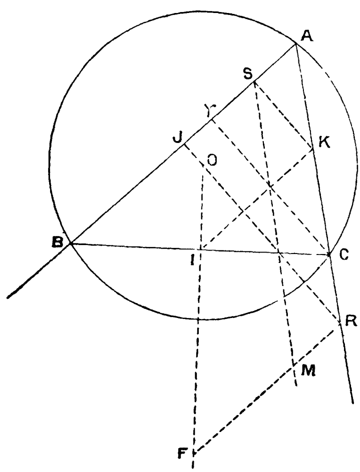


de AI par rapport à l'axe AE, ce qui correspond au point I′ de (H) symétrique de I par rapport à AE. Comme IF passe par le centre O du cercle ABC et que AE est bissectrice de $\widehat{IAF}$, F, E, I, E' sont conjugués et BC est bien la polaire de F dans le cercle circonscrit au triangle ABC.

Théorème. — *Si* β *et* γ *sont les pieds des hauteurs relatives à* B *et* C *dans le triangle* ABC, *la droite* βγ *est la polaire du point de Frégier par rapport à l'hyperbole* (H).

Nous allons montrer que la polaire de γ qui est parallèle à AB coupe OI en un point F qui est le point de Frégier relatif à I. Soient J et K (*fig.* 2) les milieux

Fig. 2.



de AB et AC, la tangente autre que l'asymptote menée de γ est telle que, si M est le point de contact et si l'on mène MR et MS parallèles à AB et à AC, on ait en ASK et AJR deux triangles semblables; KS étant parallèle à Cγ, JR l'est aussi et R est donc sur la perpendiculaire élevée à AB en son milieu J. On a alors

$$\widehat{JRB} = \widehat{JRA} = \frac{\pi}{2} - A$$

et aussi

$$\widehat{B} = \frac{\pi}{2} - A.$$

Par conséquent, le cercle construit sur OF comme diamètre qui passe en R puisque $\widehat{ORF}$ est droit, passe aussi par B et C et FC est perpendiculaire à OC; donc, F est le pôle de BC dans le cercle ABC. C'est, par suite, le point de Frégier de I. De même, la polaire de β passe par F, donc, $\beta\gamma$ est la polaire de F par rapport à l'hyperbole (H).

Remarque. — On voyait immédiatement que la polaire était parallèle à $\beta\gamma$, car elle est parallèle à la tangente en I' (*fig.* 1), puisque AF et cette direction sont conjuguées; or, la tangente en I' est antiparallèle à BC, donc parallèle à $\beta\gamma$.

Théorème. — *Quand* I *décrit l'hyperbole* (H), F *décrit une hyperbole* (F) *ayant même centre et mêmes asymptotes que* (H), *donc homothétique de* (H), *avec* A *pour centre d'homothétie.*

En effet, on a

$$(1) \qquad EI = CE \cos \widehat{IEC}$$

et dans le triangle ECF

$$(2) \qquad \frac{CE}{\sin \widehat{IFC}} = \frac{EF}{\sin \widehat{ECF}};$$

or on voit que

$$\left\{\begin{aligned} \widehat{\mathrm{IEC}} &= \frac{\pi}{2} - \frac{\mathrm{A}}{2} \\ \widehat{\mathrm{IFC}} &= \frac{\pi}{2} - \mathrm{A} \\ \widehat{\mathrm{ECF}} &= \frac{\mathrm{A}}{2} \end{aligned}\right.$$

en comparant (1) et (2), il vient alors :

$$(3) \qquad \frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{AF}} = \frac{\mathrm{EI}}{\mathrm{EF}} = \cos \mathrm{A},$$

ce qui prouve bien le théorème énoncé, car

$$\frac{\mathrm{AI'}}{\mathrm{AF}} = \cos \mathrm{A}.$$

Remarques. — I. Traçons la tangente en I′ à l'hyperbole (H), elle coupe les asymptotes en B′ et C′ (*fig.* 1). AI′ coupe $\beta\gamma$ en N tel que

$$(4) \qquad \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AI'}} = \frac{\mathrm{A}\beta}{\mathrm{AB'}} = \frac{\mathrm{A}\beta}{\mathrm{AB}} = \cos \mathrm{A}.$$

donc N décrit aussi une hyperbole (N) homothétique de (H) avec A pour centre d'homothétie, et (N) et (F) sont les transformées par polaires réciproques par rapport à (H); si l'existence de l'une est démontrée, l'existence de l'autre s'en déduit.

II. De (3) et (4) on déduit

$$\overline{\mathrm{AI'}}^2 = \overline{\mathrm{AH}}.\overline{\mathrm{AJ}},$$

ce qui prouve que N est, sur $\beta\gamma$, conjugué de F par rapport à (H). D'après la remarque du second théorème, on peut immédiatement conclure que $\beta\gamma$ est la polaire de F par rapport à (H).

III. Cette propriété est vraie pour les trois coniques;

dans le cas de la parabole, on obtient une parabole égale à la première qui a subi une translation égale à $2p$, p étant le paramètre, car

$$I'F = 2MN = 2p,$$

en conservant pour I' et F les notations de plus haut, et en désignant par MN la sous-normale relative à I.