J. LEMAIRE

Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements (suite et fin)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 113-136

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__113_1>

[M[1] 15b]

SUR L'HYPOCYCLOIDE A TROIS REBROUSSEMENTS

(*suite et fin*);

PAR M. J. LEMAIRE.

SYSTÈME DE QUATRE TANGENTES A UNE H_3.

30. Proposons-nous de construire l'hypocycloïde tangente à quatre droites : Si trois des tangentes

données partent d'un même point A, et coupent la quatrième en B, C, X, la courbe à construire est l'enveloppe des droites $\Delta(\theta)$ relatives à ABC, θ étant l'angle de XA avec BC; nous savons obtenir le cercle inscrit dans l'hypocycloïde qui est alors bien déterminée.

Dans le cas général, BC, CA, AB, et $\alpha\beta\gamma$ étant les droites données, la parallèle menée par A à $\alpha\beta\gamma$ coupe en α' le cercle ABC, et la parallèle menée par A à $\alpha\alpha'$ est la troisième tangente issue de A; on est ramené au cas précédent.

Si l'on se donne trois tangentes BC, CA, AB, et le point de contact A_1 de BC, le parallélogramme AA_2A_1X (*fig.* 6) détermine AX.

Nous avons vu (16) comment construire une H_3 tangente à deux droites données en deux points donnés.

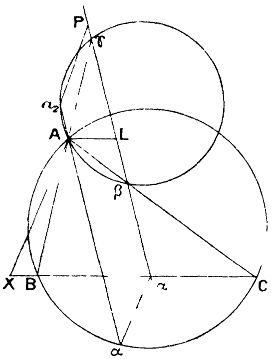
Supposons encore connus un point A_1 et le cercle osculateur en ce point, et une autre tangente quelconque AB : la corde $A_2A_1A'_2$ interceptée (*fig.* 5) par le cercle O sur la normale en A_1, valant quatre fois la distance du centre ω de l'hypocycloïde à BC, est la moitié du rayon de courbure en A_1; comme $\widehat{ABA'_2}$ est droit, les données permettent d'obtenir B, A'_2, A_2, d'où le cercle O, et le triangle ABC, qui est un triangle T, et par suite le cercle inscrit dans l'hypocycloïde.

Enfin, si les quatre tangentes données sont confondues, ou si l'on connaît un point de l'hypocycloïde, et la parabole osculatrice en ce point, les propriétés de cette parabole et la figure 4 donnent le centre de la courbe et le cercle tritangent.

31. Pour obtenir, dans le cas général, le point de contact de $\alpha\beta\gamma$ avec l'hypocycloïde, il suffit d'appliquer au triangle $A\beta\gamma$ la remarque du nº **24**, et de mener, par le point où le cercle $A\beta\gamma$ coupe la parallèle Aa_2 à $\beta\gamma$, la parallèle à AX, troisième tangente issue de A : le point P où cette droite coupe $\alpha\beta\gamma$ est le point de contact (*fig.* 9).

Remarquons que, AX étant parallèle à la droite qui joint α à l'extrémité α' de la corde $A\alpha'$ parallèle à $\alpha\beta\gamma$,

Fig. 9



$a_2\alpha'\alpha P$ est un parallélogramme. Menons par A la parallèle à BC qui coupe $\alpha\beta\gamma$ en L, la figure donne

$$P\alpha = A\alpha' - A\alpha_2.$$

Si $\alpha\beta\gamma$ se déplace en conservant une direction fixe, $\frac{Aa_2}{AL}$ conserve une valeur constante λ, et $P\alpha$ a pour valeur

$$P\alpha = A\alpha' + \lambda\, AL,$$

de sorte que P décrit une droite, et l'on a ce théorème énoncé par M. Bickart (*Revue de Mathématiques spéciales*, 1908) : *Le lieu géométrique du point de contact d'une hypocycloïde inscrite à un triangle avec une tangente de direction fixe est une droite.*

32. Énonçons les propositions suivantes, faciles à obtenir :

Les centres des cercles circonscrits aux quatre triangles déterminés par quatre tangentes à une H_3 sont sur un cercle passant au foyer de la parabole tangente à ces droites, et égal au cercle tritangent.

ABC étant un triangle circonscrit à une H_3, une tangente variable forme avec les côtés trois triangles : les centres des cercles qui leur sont circonscrits sont les sommets d'un triangle de *grandeur constante*, *semblable à* ABC, et inscrit dans un cercle égal au cercle tritangent et passant au centre du cercle ABC.

Si un quadrilatère circonscrit à une H_3 est inscriptible dans un cercle, sa troisième diagonale est tangente à la courbe, et réciproquement; cela résulte de ce que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un tel quadrilatère soit inscriptible est que $\alpha + \gamma \equiv \beta + \delta$ (à $k\pi$ près), α, β, γ, δ désignant les angles des côtés avec $U'U$.

Utilisant cette remarque et le théorème de Laguerre (3), nous trouvons que : si un quadrilatère circonscrit à une H_3 est inscriptible dans un cercle, le quadrilatère formé par les tangentes adjointes des côtés, et le quadrilatère formé par les troisièmes tangentes issues des sommets du premier, sont aussi inscriptibles; et leurs troisièmes diagonales coïncident avec la tangente adjointe de la troisième diagonale du quadrilatère donné.

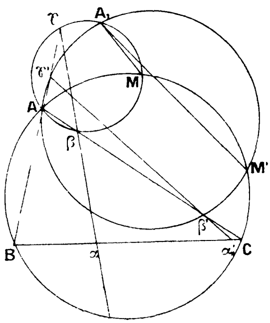
Les quatre quadrilatères formés chacun par les troisièmes tangentes issues de deux sommets opposés, et par les tangentes adjointes de deux côtés opposés du quadrilatère primitif, possèdent les mêmes propriétés.

Si de deux points d'une tangente à une H_3 on mène deux tangentes, la parabole qui touche ces quatre droites a son foyer sur la première tangente.

Systèmes de cinq tangentes a une H_3.

33. Soient cinq droites, dont trois forment un triangle ABC, les deux autres étant $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$ (*fig.* 10); M, point commun aux cercles ABC et A$\beta\gamma$,

Fig. 10.



est le foyer de la parabole tangente aux quatre premières droites; M′, point commun aux cercles ABC et A$\beta'\gamma'$, est le foyer de la parabole tangente aux trois premières droites et à $\alpha'\beta'\gamma'$; A_1, point commun aux cercles A$\beta\gamma$ et A$\beta'\gamma'$, est le foyer de la parabole tangente à AB, AC, $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$.

$\alpha\beta\gamma$ est la droite $\Delta(\theta)$ de M relative au triangle ABC, l'angle θ étant l'angle que font respectivement Mα, Mβ, Mγ avec BC, CA, AB. De même $\alpha'\beta'\gamma'$ est la droite $\Delta(\theta')$ de M′, θ' étant l'angle analogue.

On voit fort aisément que A_1M' fait avec A_1M un angle $(\theta'-\theta)$. B_1 et C_1 désignant les foyers des deux paraboles tangentes : la première à BC, BA, $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, et la deuxième à CA, CB, $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, les droites B_1M'

et C_1M' font avec B_1M et C_1M respectivement le même angle $(\theta' - \theta)$.

On a le *théorème de Miquel :* les foyers des cinq paraboles déterminées par cinq tangentes associées quatre à quatre appartiennent à un même cercle; on l'appelle le *cercle de Miquel* des cinq droites.

Pour que les cinq droites soient tangentes à une H_3, *il faut et il suffit que* $\theta' = \theta$, *c'est-à-dire que le cercle de Miquel se réduise à une droite.* Nous appellerons cette droite *la droite de Miquel des cinq tangentes.*

Ce beau théorème est dû à P. Serret.

Si nous désignons par a, b, c, d les angles, avec $U'U$, des tangentes BC, CA, AB, $\alpha\beta\gamma$ d'une H_3, la dernière est la droite $\Delta(\theta)$ de M par rapport à ABC, l'angle θ ayant pour valeur

$$\theta \equiv \frac{\pi}{2} - (a + b + c).$$

Soient une autre tangente $\alpha'\beta'\gamma'$, droite $\Delta(\theta)$ de M', d' son angle avec $U'U$, ω celui de MM'; utilisant les propriétés des droites $\Delta(\theta)$, on obtient sans peine la relation

$$a + b + c \equiv \omega + d + d' - 2\theta,$$

d'où

$$a + b + c + d + d' + \omega \equiv 0. \tag{1}$$

De la symétrie de cette relation en a, b, c, d, d', résulte que les droites qui joignent les foyers de deux des paraboles tangentes à quatre des cinq tangentes données ont même direction; nous retrouvons que le cercle de Miquel des cinq tangentes se réduit à une droite, dont l'égalité (1) donne la direction.

34. Dans ces conditions, les faisceaux $(M, M'\alpha\beta\gamma)$

et $(M', M\alpha'\beta'\gamma')$ ayant leurs droites respectivement parallèles, sont égaux; m et m' désignant les traces de MM' sur $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$, on a alors

$$(m\alpha\beta\gamma) = (m'\alpha'\beta'\gamma');$$

d'où ce théorème : *Les droites* $\Delta(\theta)$ *des deux points* M *et* M', *et la droite* MM' *touchent une même conique inscrite à* ABC; autrement dit : *la droite de Miquel de cinq tangentes à une* H_3 *touche la conique tangente aux cinq droites.*

Énonçons les conséquences suivantes de (1) :

La droite de Miquel de quatre tangentes fixes a, b, c, d, et d'une tangente variable d' forme avec celle-ci des angles dont les bissectrices ont des directions fixes.

Six tangentes formant un triangle $T(\theta)$ *et un triangle* $T(-\theta)$, *chacune d'elles est parallèle à la droite de Miquel des autres.*

Si trois tangentes sont fixes, et si deux autres se coupent sur une tangente fixe, leur droite de Miquel a une direction invariable.

Les tangentes adjointes de cinq tangentes données ont une droite de Miquel parallèle à la tangente adjointe de la tangente parallèle à la droite de Miquel des premières. Il en est de même pour les troisièmes tangentes issues des sommets de tout polygone formé par les cinq premières, etc.

Étant données cinq tangentes, dont trois issues d'un point P, *deux d'un point* Q, *leur droite de Miquel passe en* P *et est parallèle à la troisième tangente issue de* Q.

Si donc on leur joint cette troisième tangente, ces six droites, prises cinq à cinq, ont six droites de

Miquel symétriques des tangentes par rapport au milieu de PQ. Les foyers des neuf paraboles déterminées en associant deux tangentes issues de P à deux tangentes issues de Q sont trois à trois sur ces droites symétriques des tangentes.

35. *Sur la parabole* Π *tangente à quatre tangentes* α, β, γ, δ *d'une* H_3. — A l'aide des propriétés de la droite de Simson on établit aisément que :

L'enveloppe des axes des paraboles tangentes aux trois côtés d'un triangle est une H_3 inversement homothétique, dans le rapport de 2 à 1, par rapport au centre de gravité du triangle ABC, de l'hypocycloïde enveloppe des droites de Simson de ce triangle; cette enveloppe des axes est tritangente au cercle circonscrit à ABC, qu'elle touche au point situé au tiers de l'arc AA_2 sous-tendu par la corde parallèle à BC, à partir de A, et aux deux points analogues. Des propriétés obtenues plus haut, on déduit les suivantes :

Les tangentes α, β d'une H_3 se coupant en P, et γ, δ en Q, le *foyer* F *de la parabole* Π tangente à ces quatre droites est symétrique, par rapport au milieu de PQ, du point commun aux troisièmes tangentes issues de P et Q.

Si donc on joint le foyer d'une parabole aux six sommets d'un quadrilatère circonscrit, la parallèle menée par chaque sommet à la droite joignant au foyer le sommet opposé touche l'hypocycloïde inscrite au quadrilatère; cela résultait d'ailleurs des propriétés immédiates des droites $\Delta(\theta)$.

Les troisièmes tangentes issues de chacun des trois couples de sommets opposés se coupent sur une même tangente à l'hypocycloïde; *l'axe de la parabole* est parallèle à cette tangente. Son angle avec U′U est égal à $\left(\frac{\pi}{2}+\alpha+\beta+\gamma+\delta\right)$, à $k\pi$ près.

Si donc on remplace δ par une autre tangente ε, l'angle des axes des deux paraboles est égal à celui de ces deux tangentes δ et ε; on en conclut que si cinq tangentes α, β, γ, δ, ε d'une H_3 forment un pentagone, les axes des cinq paraboles déterminées par ces tangentes associées quatre à quatre forment un pentagone qui a ses angles égaux à ceux du premier, et disposés dans l'ordre inverse.

ω désignant l'angle, avec U′U, de la droite de Miquel de cinq tangentes α, β, γ, δ, ε; ε' celui de l'axe de la parabole tangente aux quatre premières, les relations

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\omega\equiv 0,$$
$$\varepsilon'\equiv\alpha+\beta+\gamma+\delta+\frac{\pi}{2}$$

donnent

$$\varepsilon+\omega+\varepsilon'\equiv\frac{\pi}{2}.$$

Par suite, *chacune des cinq tangentes est coupée par la tangente parallèle à l'axe de la parabole tangente aux quatre autres sur une tangente fixe*, qui est *parallèle à la droite de Miquel des cinq tangentes*.

Le paramètre de la parabole $\Pi(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ est égal à la valeur absolue de

$$8r\cos(\alpha+\beta+\gamma)\cos(\beta+\gamma+\delta)\cos(\gamma+\delta+\alpha)\cos(\delta+\alpha+\beta),$$

et aussi à

$$p=\frac{R_\alpha R_\beta R_\gamma R_\delta}{2r^3},$$

R_α, R_β, R_γ, R_δ désignant les rayons des cercles circonscrits aux triangles formés par les tangentes données.

La conique inscrite au triangle (α, β, γ), et tangente à l'hypocycloïde au point de contact de δ, touche la tangente menée par le foyer F de la parabole Π au cercle circonscrit au triangle.

Si le quadrilatère formé par les tangentes données est inscriptible dans un cercle, le foyer F est sur la troisième diagonale, qui touche en φ l'hypocycloïde; $F\varphi$ et cette diagonale ont le même milieu.

La distance des foyers F et F′ des deux paraboles $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ et $(\alpha, \beta, \gamma, \delta')$ tangentes à trois tangentes α, β, γ d'une H_3, et à deux autres δ et δ' respectivement, est égal à la valeur absolue de

$$2r\cos(\alpha+\beta-\gamma)\sin(\delta-\delta').$$

Si les tangentes δ et δ' se déplacent en faisant un angle constant, FF′ reste constante, et enveloppe un cercle concentrique au cercle circonscrit au triangle des tangentes α, β, γ.

En particulier, à deux tangentes rectangulaires respectivement associées à trois tangentes α, β, γ, correspondent deux paraboles dont les axes sont rectangulaires, et les foyers deux points diamétralement opposés du cercle circonscrit au triangle $(\alpha\beta\gamma)$.

Le cercle passant aux foyers des paraboles $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ et $(\alpha, \beta, \gamma, \delta')$ et au point commun à leurs axes est égal au cercle circonscrit au triangle des trois tangentes α, β, γ.

Si, à deux tangentes δ, δ' on associe trois autres tangentes α, β, γ, deux à deux, on détermine trois paraboles dont les axes forment un triangle inversement semblable au triangle des tangentes α, β, γ.

Si $\alpha=\beta=\gamma=\delta$, Π devient la parabole ayant, au point de contact de la tangente α, *un contact du troisième ordre* avec l'hypocycloïde; l'expression du paramètre devient $8r\cos^4 3\alpha$, qu'on déduirait aussi de la construction donnée au n° 9; la directrice et le foyer de cette parabole peuvent être retrouvés aussi à l'aide des considérations actuelles.

Le rayon de courbure ρ en un point et le paramètre p' de la parabole surosculatrice au même point sont liés entre eux, et au rayon r du cercle tritangent, par la relation

$$\rho^4 = 512 p' r^3.$$

Dans le cas particulier où les tangentes α, β, γ, δ ont leurs points de contact en ligne droite, le quadrilatère qu'elles forment et la parabole inscrite possèdent encore des propriétés intéressantes.

36. *Propriété de cinq tangentes.* — Nous avons vu (19) que si trois tangentes a, b, c à une H_3 forment trois triangles avec deux autres tangentes d, d', les orthocentres de ces triangles sont sur un cercle passant au point (d, d') et ayant son centre sur le cercle tritangent. Or, ces orthocentres sont les sommets du triangle formé par les directrices des paraboles respectivement tangentes aux droites b, c, d, d'; c, a, d, d'; a, b, d, d'.

On a ainsi ce théorème : *Étant données cinq tangentes à une* H_3, *en associant deux d'entre elles successivement avec deux des trois autres, on détermine trois paraboles, dont les directrices forment un triangle inscrit dans un cercle, qui passe au point commun aux deux premières tangentes, et qui a son centre sur le cercle tritangent.*

Ce triangle est inversement semblable au triangle des trois tangentes a, b, c.

Digression sur une conique remarquable du plan d'un triangle.

37. On sait que les symétriques, par rapport aux milieux des côtés d'un triangle, des points où ces côtés

sont coupés par une droite Δ, sont sur une droite Δ'; Δ se déduit de même de Δ'. Si Δ tourne autour d'un point fixe P, Δ' enveloppe une conique tangente aux côtés du triangle aux points symétriques, par rapport à leurs milieux, des traces de PA, PB, PC, sur ces côtés; toute conique inscrite au triangle peut être obtenue de cette manière.

Si P est l'orthocentre H du triangle, la conique correspondante, que nous appellerons S, possède d'intéressantes propriétés qui nous seront utiles, et que nous nous contenterons d'énoncer :

Premier cas. — *Le triangle* ABC *est acutangle.* — La conique S touche les côtés aux points A_1, B_1, C_1 symétriques, par rapport aux milieux A', B', C', de ces côtés, des pieds D, E, F des hauteurs correspondantes.

S *est la conique concentrique au cercle circonscrit à* ABC, *et tangente aux trois côtés : c'est une ellipse inscrite au triangle.*

Les hauteurs du triangle sont normales à S; *les normales en* A_1, B_1, C_1 *concourent au point* K *symétrique de* H *par rapport au centre* O *du cercle circonscrit.*

Le demi-diamètre conjugué de OA_1 est égal au segment $A_1A'_1$ perpendiculaire à BC, extérieur au triangle, et limité au cercle, ou encore à HD, ou AA'', en appelant A'' le point où OA_1 coupe AD. Si R désigne le rayon du cercle O, et a, b les demi-axes de S.

$$a = \frac{R + OH}{2}, \quad b = \frac{R - OH}{2} \quad \text{ou} \quad R = a + b, \quad OH = a - b,$$

Les cercles de Chasles de l'ellipse S *sont le cercle* *circonscrit au triangle et le cercle concentrique passant en* H. *L'axe focal coïncide en direction avec la bissectrice de* $\widehat{A'_1 O A''_1}$, A''_1 symétrique de A'_1 par rapport à A_1.

O et H restant fixes, ainsi que le cercle, si le triangle se déforme, A se déplaçant sur le cercle dans un sens déterminé, l'ellipse S reste constante en grandeur, mais tourne autour de O; le point de concours K des normales aux points de contact des côtés reste fixe. On conclut de là que : *Le cercle de Chasles* Γ, *de rayon* $(a+b)$, *d'une ellipse, est circonscrit à une infinité de triangles circonscrits à l'ellipse; ces triangles sont acutangles, leurs hauteurs sont normales à l'ellipse; les normales aux points où elle touche les côtés d'un triangle concourent au point* K *symétrique de l'orthocentre* H *de ce triangle par rapport au centre de l'ellipse;* H *et* K *appartiennent au second cercle de Chasles* Γ' *de rayon* $(a-b)$. Ces dernières propriétés ont été données par M. Barisien (*Nouv. Ann.*, 1911).

Deuxième cas. — *Le triangle* ABC *a un angle obtus* A. — L'orthocentre H est alors extérieur au cercle O; il y a peu de changements à apporter à ce qui précède : la conique S est encore une ellipse de centre O, mais *ex-inscrite* au triangle, touchant le côté opposé à l'angle obtus et les prolongements des autres; les remarques relatives aux hauteurs, et aux normales aux points où S touche les côtés, s'appliquent; a et b désignant encore les demi-axes

$$a = \frac{OH + R}{2}, \quad b = \frac{OH - R}{2} \quad \text{ou} \quad R = a - b, \quad OH = a + b.$$

On a

$$R < OH < 3R, \quad \text{d'où} \quad a > 2b,$$

et tandis que, dans le cas d'un triangle acutangle, aucune condition n'est imposée à a et b, dans le cas actuel on a $a > 2b$; cette condition, qui exprime que le second cercle de Chasles coupe l'ellipse en des points réels, étant remplie, on a ce théorème : *Le cercle de Chasles* Γ', *de rayon* $(a - b)$, *d'une ellipse est circonscrit à une infinité de triangles auxquels l'ellipse est ex-inscrite; ces triangles ont un angle obtus; leurs hauteurs sont normales à l'ellipse; les normales aux points où elle touche les côtés concourent en* K, *symétrique de l'orthocentre* H *du triangle par rapport au centre de l'ellipse;* H *et* K *appartiennent à l'autre cercle de Chasles* Γ.

TROISIÈME CAS. — *Le triangle* ABC *est rectangle en* A. — L'orthocentre est alors en A; la transversale réciproque Δ' de toute droite Δ passant en A, et autre que AB et AC, coïncide avec BC; celle de AB est indéterminée et passe en C; de même pour AC. En considérant ce cas comme la limite des précédents, on est conduit à dire qu'alors S se réduit au segment de droite BC.

NORMALES A L'HYPOCYCLOIDE. — ELLIPSES TRITANGENTES.

38. La développée d'une H_3 étant une H_3, d'un point on peut mener trois normales au plus à la première; ces normales sont inversement homothétiques des tangentes parallèles, dans le rapport de 3 à 1, par rapport au centre ω de la courbe. Donc, *si trois tangentes concourent en* H, *les normales parallèles*

concourent au point K *de* ωH, *tel que* $\overline{\omega K} = - 3\,\overline{\omega H}$, *et réciproquement.*

Le lieu des points d'où partent deux normales rectangulaires est le cercle des rebroussements.

Nous savons que *les normales perpendiculaires aux côtés d'un triangle* T *concourent*. Réciproquement, *les tangentes menées aux pieds des normales issues d'un point* K *forment un triangle* T : car la tangente qui forme un triangle T avec deux des tangentes données ne peut différer de la troisième, puisqu'elles correspondent à la même normale.

Le théorème de Laguerre (3) et sa réciproque s'appliquent aux normales issues d'un point.

39. Si ABC est un triangle T d'une H_3, les points A_1, B_1, C_1 de contact des côtés sont précisément les points où ces côtés touchent la conique S de ce triangle (37), de sorte que cette conique est tritangente à l'hypocycloïde; donc *les pieds des normales issues d'un point sont les points de contact d'une ellipse tritangente*, car les tangentes en ces points forment un triangle T.

Réciproquement, *les points de contact de toute conique tritangente sont les pieds des normales issues d'un point :* on sait que, si par quatre points d'une cubique passe une conique variable, la droite qui joint les deux autres points communs à ces courbes coupe la cubique en un point fixe; cela est vrai en particulier pour une conique tangente en deux points fixes à la cubique.

Corrélativement, si une conique touche une courbe de troisième classe en deux points fixes, les deux autres tangentes communes se coupent sur une tangente fixe; si ces deux tangentes viennent à coïncider, leur point de contact commun ne peut différer de celui de cette tangente fixe; autrement dit, de toutes les coniques tangentes à une courbe de troisième classe en deux points fixes, une seule a un troisième contact avec elle. Ceci posé, si A, B, C sont les points de contact d'une H_3 et d'une conique, et si du point P commun aux normales en A et B, on mène la troisième normale PC′, les points A, B, C′ étant les contacts d'une conique tritangente, C′ ne peut différer de C, ce qui démontre la proposition.

Ainsi, *les ellipses* S *attachées aux triangles* T *d'une* H_3 *sont les seules coniques tritangentes à cette courbe.*

40. En résumé, à tout triangle T correspond une ellipse tritangente, et réciproquement : si T est acutangle, on a

$$a + b = R = 2r,$$
$$a - b = OH = 2\omega O,$$

a, b désignant les demi-axes de l'ellipse ; R le rayon du cercle O circonscrit au triangle T, double du rayon r du cercle inscrit dans l'hypocycloïde ; ω le centre de la courbe, H l'orthocentre de T.

Si T est obtusangle

$$a - b = R = 2r,$$
$$a + b = OH = 2\omega O.$$

Si T est rectangle, $b = 0$, S se réduit à l'hypoténuse du triangle, qui est une corde de l'hypocycloïde tangente à la courbe; on retrouve qu'une telle corde est égale à $4r$, etc.

On peut finalement énoncer ce théorème :

Il existe deux familles d'ellipses tritangentes à *une* H_3, *et les tangentes aux points de contact de chacune forment un triangle* T.

Pour l'une des familles, T *est acutangle; l'ellipse est intérieure à l'hypocycloïde; le cercle circonscrit à* T *est le grand cercle de Chasles de l'ellipse; l'autre cercle de Chasles a pour diamètre* HK, H *désignant l'orthocentre du triangle, et* K *le point de concours des normales aux points de contact des deux courbes; la somme des axes de ces ellipses est constante et égale à* $4r$; *leurs centres sont intérieurs au cercle inscrit dans l'hypocycloïde.*

Pour l'autre famille, T *est obtusangle; l'ellipse n'est pas intérieure à l'hypocycloïde, qu'elle coupe en deux points réels* (on peut s'en rendre compte en prouvant, par un calcul simple, que le rayon de courbure au point de contact des deux courbes opposé à l'angle obtus du triangle des tangentes communes est plus grand pour l'ellipse que pour l'hypocycloïde); *le cercle circonscrit à* T *est le petit cercle de Chasles de l'ellipse; l'autre cercle de Chasles a pour diamètre* HK; *la différence des axes de ces ellipses est égale à* $4r$; *leurs centres sont extérieurs au cercle inscrit dans l'hypocycloïde.*

Certaines de ces propriétés ont fait l'objet de la question du concours général en 1899.

41. ω étant le milieu de OH, O celui de HK, on peut dire que : *toutes les ellipses tritangentes dont les centres sont équidistants du centre de l'hypocycloïde sont égales; le point de concours des normales aux points de contact de chaque ellipse décrit un cercle concentrique à l'hypocycloïde.*

Supposant que K vienne en un point P de la développée de l'hypocycloïde et appliquant les résultats précédents, nous voyons que :

En chaque point C d'une H_3 passe une ellipse E ayant en ce point un contact du troisième ordre avec la courbe, et la touchant en un autre point C_1 ; la normale en C_1 passe au centre de courbure P des courbes en C; la tangente en C_1 est perpendiculaire à la tangente adjointe à la tangente en C à l'hypocycloïde, et touche le petit cercle de Chasles de E sur la tangente en C à l'ellipse; le grand cercle de Chasles passe en P; le lieu du centre de E est la courbe symétrique de l'hypocycloïde donnée par rapport à son centre, etc.

Hypocycloides tritangentes a une ellipse.

42. De ce qui précède on déduit aussi que :

Il existe deux familles d'H_3 *tritangentes à une ellipse fixe* S, *d'axes* $2a$ *et* $2b$: *pour l'une, les points de contact sont les points où* S *touche les côtés des triangles qui lui sont circonscrits et qui sont inscrits dans le grand cercle de Chasles* Γ *de l'ellipse; ces triangles qui sont acutangles sont des triangles* T *pour chaque* H_3; *ces* H_3 *sont toutes égales, le diamètre de leurs cercles inscrits valant* $(a+b)$; *ces cercles touchent les cercles décrits sur les axes de* S *comme diamètres; l'ellipse est intérieure à chacune des* H_3; *les centres de celles-ci sont sur le cercle concentrique à l'ellipse et de rayon* $\frac{a-b}{2}$; *les orthocentres des triangles des tangentes aux points de contact, et les points de concours des normales à* S *en ces points, sont symétriques par rapport au centre de la conique et décrivent son petit cercle de Chasles* Γ'.

Pour l'autre famille, qui n'existe que si $a > 2b$, *les points de contact sont les points où l'ellipse touche les côtés des triangles, auxquels elle est ex-inscrite, et qui sont incrits dans le cercle* Γ'; *ces triangles qui sont obtusangles sont des triangles* T *pour chaque* H_3; *ces* H_3 *sont toutes égales, le diamètre de leurs cercles inscrits ayant pour valeur* $(a - b)$; *ces cercles inscrits touchent les cercles décrits sur les axes de* S *comme diamètres; l'ellipse a deux points réels communs avec chaque* H_3, *autres que les points de contact; les centres des* H_3 *sont sur le cercle concentrique à l'ellipse et de rayon* $\frac{a+b}{2}$; *les orthocentres des triangles des tangentes aux points de contact, et les points de concours des normales à* S *en ces points sont symétriques par rapport au centre de l'ellipse, et décrivent son grand cercle de Chasles* Γ.

Parmi les H_3 de cette seconde famille, quatre ont avec S un contact de troisième ordre aux points communs à S et à Γ' (41); soit C un de ces points, l'autre point de contact C_1 de l'H_3 correspondante est un point de contact d'une tangente commune à Γ' et à S; cette tangente commune touche Γ' en un point où passe la tangente en C à S, etc.

Concevons que l'ellipse S se déforme de manière que b devienne nul, a restant invariable; elle devient un segment fixe de longueur $2a$; les deux familles d'H_3 tritangentes se confondent en une seule famille d'H_3 tangentes au segment et passant en ses extrémités; de ce qui précède on déduirait des propriétés de cette famille de courbes; on retrouverait, entre autres, des propositions connues.

Tangentes communes a une H_3 et a une conique. Systèmes de six tangentes.

43. On démontre aisément par le calcul, et il résulte d'un théorème de M. G. Humbert (*Théorie des fonctions algébriques*, Appell et Goursat) *que la somme des angles que font, avec une droite déterminée, les tangentes communes à une* H_3 *et à une conique quelconque est constante.* En particulier, si la droite fixe est la tangente U′U à l'hypocycloïde en un de ses sommets, *la somme des six angles est égale à* $k\pi$, k entier; réciproquement, six tangentes à une H_3 vérifiant cette condition touchent une conique.

De là résultent de nombreuses conséquences, dont voici quelques-unes :

Les tangentes adjointes des six tangentes communes à une H_3 et à une conique touchent une autre conique.

Les troisièmes tangentes à une H_3 menées des sommets de tout hexagone circonscrit à cette courbe et à une conique touchent une autre conique. Dans ces deux théorèmes, si trois des tangentes concourent, les autres concourent.

Deux triangles $T(\theta)$ et $T(\pi - \theta)$ sont circonscrits à une conique; réciproquement, trois tangentes communes à une H_3 et à une conique formant un triangle $T(\theta)$, les trois autres forment un triangle $T(\pi - \theta)$; les cercles circonscrits à ces deux triangles sont égaux, leur rayon commun est $2r \sin\theta$.

Les trois tangentes communes à une H_3 et à un cercle osculateur forment un triangle inscrit dans un cercle dont le rayon vaut le quart du rayon du cercle osculateur.

On aurait des théorèmes analogues en considérant des coniques ayant avec l'hypocycloïde un ou plusieurs contacts de divers ordres; on retrouverait en particulier des propriétés des coniques tritangentes.

Les normales à une H_3 aux points où cette courbe est touchée par ses six tangentes communes avec une conique touchent une autre conique; les normales relatives à un triangle $T(\theta)$ et à un triangle $T(\pi - \theta)$ touchent une conique; les normales relatives à ces divers triangles forment des triangles inscrits dans des cercles égaux.

Six tangentes touchant une conique, quatre d'entre elles et les tangentes perpendiculaires aux deux autres touchent aussi une conique.

Nous avons vu que la droite de Miquel de cinq tangentes $a_1, a_2, \ldots, a_5$ fait avec U'U un angle ω donné par

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_5 + \omega \equiv 0.$$

Elle est donc *parallèle à la sixième tangente commune à l'hypocycloïde et à la conique tangente aux cinq droites;* nous avons déjà remarqué qu'elle touche aussi cette conique.

Si à quatre tangentes on associe successivement deux tangentes rectangulaires, les droites de Miquel des deux groupes de cinq droites sont rectangulaires et se coupent au foyer de la parabole tangente aux quatre premières tangentes.

Systèmes de coniques : Les coniques tangentes à quatre tangentes fixes d'une H_3 touchent deux autres tangentes dont le point commun décrit une cinquième tangente fixe; une seule de ces coniques est donc tangente à l'hypocycloïde.

Parmi les coniques inscrites à un triangle $T(\theta)$, il en est une infinité qui sont tangentes à l'hypocycloïde ; trois de ces coniques ont avec elle un contact du deuxième ordre, et les tangentes aux points où ces coniques touchent l'hypocycloïde forment un triangle équilatéral circonscrit à une conique inscrite au premier triangle; si celui-ci est un triangle T, les points de contact sont les sommets de l'hypocycloïde.

Parmi les coniques tangentes à deux tangentes fixes a_1, a_2, une infinité touchent l'hypocycloïde en deux points et forment deux familles : pour chaque famille, les tangentes aux deux points de contact se coupent sur une tangente fixe. Ces deux tangentes fixes, b_1 et b_2, sont rectangulaires et également inclinées sur a_1 et a_2. Quatre des coniques ont avec l'hypocycloïde un contact du troisième ordre : les points de contact sont les points où b_1 et b_2 coupent l'hypocycloïde, les tangentes en ces points sont parallèles aux côtés et aux diagonales d'un carré; la conique qui les touche, en même temps que l'une des tangentes données, touche aussi la tangente perpendiculaire à l'autre tangente donnée.

Parmi les coniques tangentes à une tangente à l'hypocycloïde, cinq ont avec cette courbe un contact du quatrième ordre; les tangentes aux points de contact sont parallèles aux côtés d'un pentagone régulier, et la conique qui leur est tangente touche la tangente donnée, etc.

Hypocycloïde considérée comme transformée d'un cercle.

44. Des considérations simples montrent que la transformée par points inverses, par rapport à un triangle équilatéral, du cercle inscrit dans ce triangle, est l'hypocycloïde ayant les sommets pour points de rebroussement.

Ce mode de génération permet d'établir commodément certaines propriétés de la courbe, par exemple les suivantes :

Toute conique tangente à une H_3 et passant aux points de rebroussement est une hyperbole dont les asymptotes font un angle $\frac{\pi}{3}$.

Si, par un point de rebroussement A *d'une hypocycloïde, on mène une sécante* Ann', *les deux autres points de rebroussement sont conjugués par rapport aux tangentes en* n *et* n'; le lieu du quatrième point commun aux deux coniques passant aux points de rebroussement, et touchant respectivement l'hypocycloïde en n et n', est une conique.

Des propriétés élémentaires de la parabole on déduit que :

Si un cercle variable passe au foyer d'une parabole et touche cette courbe, la droite qui joint leurs deux autres points communs coupe l'axe de la parabole en un point fixe.

On en conclut que : si une conique fixe Σ est inscrite à un triangle, et qu'une conique variable circonscrite au triangle touche Σ, la sécante commune conjuguée de la tangente au point de contact des coniques passe en un point fixe; ce point est commun aux droites joignant les sommets du triangle aux points où Σ touche les côtés opposés.

En particulier, toute conique, circonscrite à un triangle équilatéral et tangente au cercle inscrit à ce triangle, coupe ce cercle en deux points diamétralement opposés, et réciproquement. Ce théorème conduit au suivant :

Les points de rebroussement d'une H_3, *le centre de la courbe et les extrémités de toute corde tan-*

gente sont six points d'une même conique (Bickart, *Revue de Mathématiques spéciales*, 1908).

Les deux coniques passant aux points de rebroussement et tangentes à l'hypocycloïde aux extrémités d'une corde tangente se coupent sur le cercle des rebroussements.