Nouvelles annales de mathématiques

F. Gomès Teixeira

Sur les développoïdes de l'ellipse

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 111-113

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__111_0>

[L[1]16a]

SUR LES DÉVELOPPOÏDES DE L'ELLIPSE;

PAR M. F. GOMÈS TEIXEIRA.

Considérons l'ellipse représentée par les équations paramétriques

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t,$$

et cherchons l'enveloppe d'une droite D passant par un point variable (x, y) de cette ellipse et faisant un angle constant ω avec la tangente à cette courbe en le point mentionné.

L'équation de la droite D est

$$\mathrm{Y} - b\sin t = \frac{b\cot t + am}{bm\cot t - a}(\mathrm{X} - a\cos t),$$

où $m = \tan\!\mathrm{g}\,\omega$, ou

$$b(m\mathrm{Y} - \mathrm{X})\cos t - a(\mathrm{Y} + m\mathrm{X})\sin t + \frac{1}{2}c^2 m\sin 2t + ab = 0,$$

en faisant

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

L'enveloppe des positions que cette droite prend, quand le point (x, y) parcourt l'ellipse, est déterminée par cette équation et par celle qu'on obtient en la dérivant par rapport à t, savoir :

$$b(m\mathrm{Y} - \mathrm{X})\sin t + a(\mathrm{Y} + m\mathrm{X})\cos t - c^2 m\cos 2t = 0.$$

Changeons maintenant les axes des coordonnées, en prenant pour nouveaux axes deux droites perpendiculaires l'une à l'autre passant par le centre de l'ellipse et faisant des angles égaux à ω avec les axes de cette courbe; et pour cela posons

$$X_1 = X\cos\omega - Y\sin\omega, \qquad Y_1 = X\sin\omega + Y\cos\omega.$$

Les équations précédentes deviennent

$$bX_1\cos t + aY_1\sin t - \frac{1}{2}c^2\sin\omega\sin 2t - ab\cos\omega = 0,$$
$$bX_1\sin t - aY_1\cos t + c^2\sin\omega\cos 2t = 0.$$

L'enveloppe considérée, c'est-à-dire la développoïde de l'ellipse, peut donc être représentée par les équations paramétriques

$$X_1 = \frac{c^2\sin\omega}{b}\sin^3 t + a\cos\omega\cos t,$$
$$Y_1 = \frac{c^2\sin\omega}{a}\cos^3 t + b\cos\omega\sin t.$$

Posons maintenant

$$X_1 = X_2, \qquad aY_1 = bY_2$$

les équations prennent la forme

$$X_2 = \frac{c^2}{b}\sin\omega\sin^3 t + a\cos\omega\cos t,$$
$$Y_2 = \frac{c^2}{b}\sin\omega\cos^3 t + a\cos\omega\sin t.$$

Or, ces équations représentent (comme on peut le voir, par exemple, dans notre *Traité des courbes spéciales*, t. I, p. 334) une courbe parallèle à l'astroïde définie par les équations

$$X_1 = \frac{c^2}{b}\sin\omega\sin^3 t, \qquad Y_1 = \frac{c^2}{b}\sin\omega\cos^3 t.$$

Donc, nous avons le théorème suivant, qui n'a pas encore été peut-être signalé :

Les développoïdes de l'ellipse sont des courbes affines des lignes parallèles à une astroïde.

Il résulte encore de ce qui précède que l'équation cartésienne de la développoïde de l'ellipse peut être déduite immédiatement de celle des courbes parallèles à l'astroïde (*loc. cit.*, p. 338). On trouve ainsi

$$\begin{aligned}[3(b^2X_1^2+a^2Y_1^2-c^4\sin^2\omega)-4a^2b^2\cos^2\omega]^3 \\ +b^2[27ac^2X_1Y_1\sin\omega-9a\cos\omega(b^2X_1^2+a^2Y_1^2) \\ -18ac^4\cos\omega\sin^2\omega+8a^3b^2\cos^3\omega]^2=0.\end{aligned}$$

Remarquons enfin que, en tenant compte d'un théorème connu (*loc. cit.*, p. 336), on peut encore énoncer le théorème donné ci-dessus de la manière suivante :

Chaque développoïde de l'ellipse est une courbe affine d'une autre qui enveloppe une droite qui se déplace de manière que le segment compris entre deux autres droites fixes soit constant.

Les équations des droites fixes sont

$$(2abY_1\cos\omega-c^2X_1\sin\omega)^2=(c^4\sin^2\omega-4a^2b^2\cos^2\omega)X_1^2$$

et ces droites sont donc réelles quand

$$\operatorname{tang}^2\omega>\frac{4a^2b^2}{c^4}.$$