Nouvelles annales de mathématiques

Maurice Fouché

Sur les systèmes de surfaces triplement orthogonales composés de cyclides

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 97-118

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__97_0>

[O¹6p]

SUR LES SYSTÈMES DE SURFACES TRIPLEMENT ORTHOGONALES COMPOSÉS DE CYCLIDES;

Par M. Maurice FOUCHÉ,

Répétiteur à l'École Polytechnique.

(SUITE.)

19. *Discussion des divers cas.* — Pour discuter les divers cas qui peuvent se présenter, nous allons étudier les dispositions des trois couples de tores et leurs intersections avec les plans de coordonnées.

Rappelons que chaque tore coupe celui des trois plans de coordonnées par rapport auquel il n'est pas symétrique suivant une courbe du quatrième ordre qui est le lieu des points coniques communs aux cyclides des deux autres familles. Les formes de ces trois courbes définissent chacune des dispositions qui peuvent se présenter.

Désignons par a le rayon moyen d'un tore, c'est-à-dire le rayon du cercle stationnaire, par r le rayon du cercle méridien et par h la distance du centre du tore à l'origine. Le tore a des points coniques réels si a est inférieur à r, et n'en a pas si a est supérieur à r. La section de ce tore par le plan parallèle à son axe, situé à une distance h de son centre, peut présenter une assez grande variété de formes.

Quelle que soit la forme du tore, la section est :

Imaginaire si	$h > a + r$;
Un point si................	$h = a + r$;
Une courbe ovale sans ondulation si.................	$a \leqq h < a + r$ et $h > r - a$.

Ensuite, il faut distinguer si le tore a des points coniques réels ou imaginaires, et dans le cas des points coniques réels si le cercle stationnaire est plus grand ou plus petit que le cercle intérieur de l'équateur.

Si les points coniques sont imaginaires, on a

$$a > r,$$

et la section est :

Un ovale ondulé si........	$a - r < h < a$;
En forme de 8 si..........	$h = a - r$;
Deux ovales séparés si......	$h < a - r$.

Si les points coniques sont réels et si le cercle stationnaire est plus grand que le cercle intérieur de l'équateur, c'est-à-dire si

$$a < r \quad \text{et} \quad r - a < a \quad \text{ou} \quad a > \frac{r}{2},$$

la section est :

Un ovale ondulé si.....................	$r - a < h < a$;
Un ovale avec un point isolé au centre si	$h = r - a$;
Un ovale ondulé avec un ovale simple à l'intérieur si.........................	$h < r - a$;
Deux cercles qui se coupent si.........	$h = 0$.

Si enfin le cercle stationnaire est plus petit que le cercle intérieur de l'équateur, c'est-à-dire si

$$a < r - a \quad \text{ou} \quad a < \frac{r}{2},$$

la section est :

Un ovale sans ondulation avec point isolé au centre si..........................	$h = r - a$;
Un ovale sans ondulation avec un ovale simple à l'intérieur si................	$a \leqq h < r - a$;
Un ovale ondulé avec ovale simple à l'intérieur si	$h < a$;
Deux cercles qui se coupent si..........	$h = 0$.

Considérons les deux tores dont les axes parallèles à OY sont situés dans le plan OYZ. Un autre couple est composé de deux tores ayant leurs axes parallèles à OZ et admettant pour cercles stationnaires les cercles méridiens des premiers situés dans les plans parallèles à OXY : EF, et GH sur la figure 3.

Si l'on désigne par a, r, h les longueurs correspondant, pour ces tores, à a, r, h, on aura :

$$a_1 = r, \qquad r_1 = h, \qquad h_1 = a.$$

Pour le troisième couple on raisonnera de même en partant du second, et l'on pourra dresser le Tableau suivant :

	$a, a_1, a_2.$	$r, r_1, r_2.$	$h, h_1, h_2.$
1er couple......	a	r	h
2me couple......	r	h	a
3me couple......	h	a	r

En laissant de côté pour le moment les cas d'égalité, il y a toujours une des trois longueurs qui est plus grande que chacune des deux autres ; supposons que ce soit a,

$$a > r, \qquad a > h.$$

Il y a toujours un couple de tores sans points coniques réels coupant le plan de coordonnées correspondant suivant une courbe réelle.

Il y a en tout quatre cas à distinguer :

1° $$h > a - r \quad \text{et} \quad h > r;$$

2° $$r < h < a - r,$$

ce qui suppose
$$a > 2r;$$

3° $$a - r < h < r,$$

ce qui suppose
$$a < 2r;$$

4° $$h < a - r \quad \text{et} \quad h < r.$$

Premier cas :
$$h > a - r, \qquad h > r.$$

Les tores du premier couple n'ont pas de points coniques réels et coupent le plan de coordonnées correspondant suivant une courbe ondulée.

Pour le second couple on a
$$r < h, \qquad r < a < r + h, \qquad a > h > h - r,$$
ou
$$a_1 < r_1, \qquad a_1 < h_1 < a_1 + r_1, \qquad h_1 > r_1 - a_1.$$

Donc les tores du second couple ont des points coniques réels et ils coupent le plan de coordonnées correspondant suivant un ovale sans ondulations.

Pour le troisième couple on a
$$h < a, \qquad a - h < r < h,$$
ou
$$a_2 < r_2, \qquad r_2 - a_2 < h_2 < a_2.$$

Les tores sont à points coniques réels et la courbe plane est un ovale ondulé.

Deuxième cas :
$$r < h < a - r.$$

La première courbe se compose de deux ovales séparés.

Pour le second couple on a :

$$r < h \qquad \text{et} \qquad a > r + h,$$

ou

$$a_1 < r_1 \qquad \text{et} \qquad h_1 > a_1 + r_1.$$

Les tores du second couple ont leurs points coniques réels, et leur intersection avec le plan de coordonnées correspondant est imaginaire.

Pour le troisième couple on a

$$h < a, \qquad r < a - h, \qquad r < h,$$

ou

$$a_2 < r_2, \qquad h_2 < r_2 - a_2, \qquad h_2 < a_2.$$

Les tores ont leurs points coniques réels et la courbe plane correspondante se compose de deux ovales intérieurs, le grand étant ondulé.

Troisième cas :

$$a - r < h < r.$$

La première courbe est ondulée.

Pour le second couple on a

$$r > h \qquad \text{et} \qquad r < a < r + h,$$

ou

$$a_1 > r_1 \qquad \text{et} \qquad a_1 < h_1 < a_1 + r_1.$$

Les tores n'ont pas de points coniques réels, et la courbe plane correspondante est un ovale sans ondulation.

Pour le troisième couple

$$h < a, \qquad r > h, \qquad a - h < r < a + h$$

ou

$$a_2 < r_2, \qquad h_2 > a_2, \qquad r_2 - a_2 < h_2 < r_2 + a_2.$$

Les tores ont leurs points coniques réels et la courbe plane est un ovale sans ondulation.

Quatrième cas :

$$h < a - r, \qquad h < r.$$

La première courbe se compose de deux ovales séparés.

Pour le second couple :

$$r > h, \qquad a > r + h,$$

ou

$$a_1 > r_1, \qquad h_1 > a_1 + r_1.$$

Les tores n'ont pas de points coniques réels et la courbe plane correspondante est imaginaire.

Pour le troisième :

$$h < a, \qquad r < a - h, \qquad r > h,$$

ou

$$a_2 < r_2, \qquad h_2 < r_2 - a_2, \qquad h_2 > a_2.$$

Les tores ont leurs points coniques réels et la courbe plane correspondante est un ovale sans ondulation avec un ovale simple à l'intérieur.

En résumé nous trouvons pour les quatre cas :

1° Un couple de tores sans points coniques réels et deux couples à points coniques réels.

Courbes planes : trois courbes réelles dont deux ovales ondulés, et un sans ondulation.

2° Un couple de tores sans points coniques réels et deux couples à points coniques réels.

Courbes planes : deux ovales séparés, un ovale ondulé avec ovale simple à l'intérieur, une courbe imaginaire.

3° Deux couples de tores sans points coniques réels, un couple à points coniques réels.

Courbes planes : trois ovales dont un seul est ondulé.

4° Deux couples de tores sans points coniques réels, un couple à points coniques réels.

Courbes planes : deux ovales séparés, un ovale sans ondulation avec ovale intérieur, une courbe imaginaire.

Il résulte de cette discussion qu'il n'y a jamais plus d'une courbe plane imaginaire. On en conclut qu'aucune des trois familles de cyclides ne peut se composer de cyclides ayant toutes leurs points coniques imaginaires, car, s'il en était ainsi, les lieux des points coniques des cyclides de cette famille situés dans deux plans de coordonnées seraient imaginaires. Ainsi, chacune des trois familles du système orthogonal se compose soit de cyclides ayant toutes des points coniques réels, soit de cyclides ayant des points coniques réels, et d'autres n'ayant que des points coniques imaginaires.

20. *Cas où toutes les cyclides d'une même famille ont leurs points coniques réels.* — On peut chercher la condition pour que toutes les cyclides d'une même famille aient leurs points coniques réels. On peut concevoir que tous ces points coniques réels soient sur les axes radicaux parallèles à un même axe de coordonnées, ou bien les uns sur ces axes-là, et les autres sur les axes radicaux parallèles à un autre axe de coordonnées.

Reprenons la construction indiquée au n° 16 (*fig.* 3) La cyclide qui a pour plan circonscrit le plan (P) a pour axes radicaux la parallèle à OY projetée en A et la parallèle à OZ menée par le point K, milieu de BD, soit la droite KLR qui coupe l'axe OX en R. Les points coniques situés sur le premier de ces axes radicaux sont à l'intersection de cet axe avec le tore. Dans la rotation de la droite CA autour de C, le point A parcourt en entier l'axe OX pourvu toutefois que le centre du tore ne soit pas sur l'axe OX. Il est donc impossible que la droite qui se projette en A rencontre toujours le tore en deux points réels. Donc si les points coniques sont toujours réels sur des axes radicaux parallèles ils se trouveront sur la droite KR. Ces points coniques sont les intersections L et L′ des cercles de rayon IB et JD tangents à la droite AC. L'axe radical de ces deux cercles est la droite KR, et la puissance du point K par rapport à ces deux cercles est égale à $\overline{KB}^2$ et aussi à $KL \times KL' = \overline{KR}^2 - \overline{RL}^2$, d'où

$$\overline{RL}^2 = \overline{KR}^2 - \overline{KB}^2.$$

Donc pour que les points L et L′ soient réels il suffit que KR soit plus grand que KB. Il faut d'abord que KR ne devienne pas nul, c'est-à-dire que l'axe OX ne doit pas rencontrer le cercle stationnaire du tore. Ensuite, si l'on fait tourner la droite CA, le minimum de KR se présente quand CB est dirigée sur CO et la valeur de ce minimum est $SO = h - a$. La condition cherchée est donc :

$$h - a > r \qquad \text{ou} \qquad h > a + r,$$

c'est-à-dire que le tore, quelle que soit sa forme, ne doit pas couper le plan OXY ; cela se présente dans les cas 2° et 4°, en choisissant convenablement le couple de tores. Ainsi, si l'une des familles se compose de cyclides ayant toutes leurs points coniques réels sur des axes radicaux parallèles, l'une des trois courbes planes est imaginaire, ce qui du reste était évident, puisque les points coniques de la première famille situés sur l'autre axe radical sont tous imaginaires. Si l'on se reporte aux nos 2 et 4 de la discussion, on verra que c'est le second couple de tores qui ne coupe pas le plan de coordonnées correspondant. Donc c'est la troisième famille de cyclides qui a tous ses points coniques réels, et le lieu de ces points coniques est la section plane de la première famille qui se compose de deux ovales séparés décrits, l'un par le point L, l'autre par le point L'.

Enfin, le cas où tous les points coniques d'une même famille seraient réels, mais les uns sur l'axe radical parallèle à l'un des axes de coordonnées, les autres sur l'autre axe radical est impossible. Il faudrait en effet, pour nous reporter toujours à la figure 3, qu'au moment où les points coniques disparaissent sur l'axe radical parallèle à OZ, ils apparussent sur l'axe radical parallèle à OY. On aurait ainsi pour ce cas limite une cyclide ayant deux points coniques confondus sur l'un de ces axes radicaux et deux autres confondus sur l'autre axe. Or une pareille cyclide n'existe pas. On peut du reste se rendre compte de la même impossibilité sur la figure 3 où l'axe OX coupe le contour apparent extérieur du tore en un point T. Les points coniques apparaissent sur l'axe radical de la cyclide projetée en T quand la droite CBD prend la direction CT, mais alors la longueur KR devenu K'R' est plus petite que l'oblique K'T égale à r, de sorte que si l'on reporte le point légèrement sur la gauche de la figure, on aura une cyclide sans points coniques réels.

En résumé, sauf dans le cas où l'un des tores a son centre à l'origine des coordonnées, il n'y a jamais plus d'une famille de cyclides ayant toutes leurs points coniques réels. Ces points coniques sont situés sur des axes radicaux parallèles, et les cyclides de la même famille sont toutes du type du tore déformé à points coniques réels.

21. *Cas particuliers.* — Les cas limites sont assez nombreux ; leur énumération serait fastidieuse et sans grand intérêt. Il est du reste très aisé de voir ce que deviennent les configurations précédentes quand une ou plusieurs des inégalités se trouvent remplacées par des égalités. Je me bornerai à indiquer quelques cas particuliers.

Si l'une des longueurs est nulle, ce sera r ou h. Supposons que ce soit h. Alors le premier couple de tores se compose de deux tores coïncidant sans points doubles réels, et coupant le plan OXY suivant deux cercles égaux qui ne se coupent pas. Le second couple se réduit aux cercles EF et GH (*fig.* 3, où l'axe OX doit être transporté sur la droite HF). Le troisième couple se réduit aux deux sphères engendrées par les cercles stationnaires du premier tore tournant chacun autour de leur diamètre parallèle à OX. Ces deux sphères coupent le plan OXZ suivant un même cercle réel. La famille de cyclides contenant ces deux sphères dérive par la construction du n° 16, du couple de tores réduit aux deux cercles EF et GH. Elle se compose des sphères passant par le cercle situé dans le plan OXZ. La famille qui dérive du tore unique présente cette particularité que toutes les cyclides qui la composent ont un axe radical commun projeté en C, et par suite les deux mêmes points coniques imaginaires au point où cet axe coupe le tore. Enfin la troisième famille se compose de cyclides passant par les deux cercles EF et GH. Toutes les cyclides qui la composent ont aussi les deux mêmes points coniques imaginaires sur l'axe OY projeté en C.

Si c'est r qui est nulle, le premier couple de tores se réduit à deux cercles coupant le plan OXY en deux points isolés sur l'axe OX. Le second couple se réduit à deux sphères qui ne coupent pas le plan OXZ, et le troisième couple à un seul tore à points coniques réels qui coupe le plan OXZ suivant les deux cercles égaux qui remplacent les premiers tores. La famille qui dérive des deux cercles par la construction du n° 16 se compose des sphères orthogonales à ces deux cercles, ayant pour plan radical commun le plan OYZ qu'elles coupent suivant un même cercle imaginaire. La famille qui dérive des deux sphères se compose de cyclides passant par les deux cercles et admettant par conséquent pour points coniques communs les deux points d'intersection de ces cercles avec l'axe OX ; c'est celle qui comprend le tore, et toutes les cyclides qui la composent sont du type du tore déformé. Enfin, la troisième famille dérivant du tore et comprenant les deux cercles égaux se compose de cyclides du type à deux fuseaux ayant pour points coniques communs les deux mêmes points de l'axe OX.

Si deux des longueurs sont nulles, $h = r = 0$, le premier couple de tores se réduit à un cercle situé dans le plan OXZ et ayant son centre à l'origine, le second à deux points sur l'axe OX et le troisième à une sphère unique ayant son centre à l'origine. Les familles qui dérivent du cercle et des deux points sont composées de sphères, et la troisième se compose de cyclides à trois plans de symétrie.

C'est du reste le seul cas où se rencontre cette particularité; pour qu'une cyclide ait trois plans de symétrie, il faut que ses deux axes radicaux se rencontrent. En vertu de la construction du n° 16 (*fig.* 3), il faudra donc que le point A se confonde avec le point R, et par suite avec le point K. Cela arrivera si l'axe OX coupe le cercle moyen du tore, et si l'on fait passer la droit AC par le point d'intersection ; mais cette circonstance ne peut se présenter pour toutes les positions de la droite AC que si le tore se réduit à une sphère ayant son centre sur l'axe OX, c'est-à-dire si $h = r = 0$.

Le cas le plus remarquable est peut-être celui où les trois longueurs sont égales : $a = r = h$. Alors tous les tores sont égaux ; ils ont pour méridienne deux cercles égaux tangents et les lieux des points doubles sont des ovales de Cassini ayant leurs foyers à une distance du centre égale au rayon de ces cercles, avec leur petit axe égal à la distance des foyers et un rayon de courbure infini aux extrémités de ce petit axe. Ce qui fait l'intérêt de ce cas particulier, c'est que toutes les cyclides d'une famille sont respectivement égales à celles des deux autres familles. Parmi ces cyclides, il en est à points coniques réels du type du tore déformé, d'autres sans points doubles réels et d'autres à points doubles réels du type à deux fuseaux.

22. *Disposition des cyclides d'une même famille.* — Revenons au cas général. Les cyclides d'une même famille présentent des dispositions remarquables sur lesquelles il convient d'insister.

Il y a deux familles de cyclides qui se composent de surfaces admettant le plan OXY pour plan de symétrie. Les cyclides d'une de ces familles coupent ce plan chacune suivant deux cercles (ω) et (φ) ayant leur centre sur l'axe OX. Mais ces cyclides sont deux à deux symétriques par rapport au plan OYZ. Nous avons ainsi deux familles de cercles, celle des cercles (ω) et celle des cercles (φ), les cercles de chaque famille étant deux à deux symétriques par rapport à l'origine O. Les cyclides de la seconde famille coupent également le plan OXY suivant deux familles de cercles (ω') et (φ') ayant leur centre sur OY et les cercles de chaque famille étant aussi deux à deux symétriques par rapport à l'origine.

Il faut de plus que les cercles (ω') soient orthogonaux aux cercles (ω) ou aux cercles (φ) : supposons que ce soit aux cercles (ω). Alors les cercles (φ) seront orthogonaux aux cercles (φ'). Nous aurons ainsi sur le plan OXY deux réseaux de cercles orthogonaux (ω) et (ω') d'une part, (φ) et (φ') d'autre part. De là résulte que l'origine O aura la même puissance m par rapport à tous les cercles (ω), la même puissance $-m$ par rapport à tous les cercles (ω'), la même puissance n par rapport à tous les cercles (φ), et la même puissance $-n$ par rapport à tous les cercles (φ').

Une cyclide est complètement déterminée par les cercles (ω) et (φ) à condition qu'on choisisse l'un des centres de similitude de ces deux cercles, S. Elle sera le lieu des cercles décrits dans les plans perpendiculaires au plan de ces deux cercles et admettant pour diamètres les segments EF qui joignent deux points antihomologues. Soient (*fig.* 4) A, B, C, D, les intersections de deux cercles avec la droite de leurs centres prise pour axe OX, les points antihomologues étant A et D, B et C.

D'après ce qu'on vient de dire, on aura pour toutes les cyclides de la même famille :

$$\mathrm{OA} \times \mathrm{OB} = m, \qquad \mathrm{OC} \times \mathrm{OD} = n.$$

Mais la cyclide considérée coupe le plan OXZ suivant les cercles ayant pour diamètre AD et BC. On aura donc encore, pour toutes les cyclides de la même famille :

$$OA \times OD = m', \qquad OB \times OC = n'$$

avec la condition :

$$mn = m'n' = OA.OB.OC.OD.$$

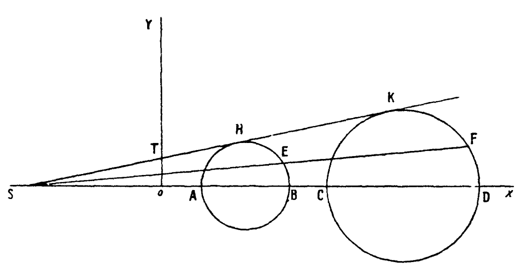
On voit ainsi que toutes les cyclides d'une même famille, et par suite le système orthogonal tout entier est complètement déterminé par les trois nombres m, n, m', comme il l'était par les trois nombres a, r, h. La valeur de m permet en effet de déterminer le cercle (AB) quand on s'en donne le centre; la valeur de m' permet de placer le point D sur l'axe OX et celle de n, le point C, ce qui détermine complètement la figure. On obtient toute la famille en déplaçant le centre du cercle AB.

De même, *le système entier est complètement déterminé si l'on se donne une seule cyclide et le point* O *sur l'un des axes radicaux de cette cyclide.*

Il est aisé de construire alors l'un des tores qui ont servi à la construction du n° 16.

Considérons en effet (*fig.* 4) les deux plans circon-

Fig. 4.



scrits à la cyclide donnée qui se coupent suivant une droite projetée en S, et dont l'un touche les cercles

(AB) et (CD) en H et K respectivement. La droite SHK rencontre OY en T. On trace dans le plan OXY les deux cercles de centre T et de rayon TH et TK lesquels sont orthogonaux respectivement aux cercles (AB) et (CD). Le tore cherché a son axe parallèle à OZ projeté en T. Son équateur se compose des cercles TH et TK et sa méridienne est le cercle ayant pour diamètre HK et situé dans un plan perpendiculaire au plan OXY.

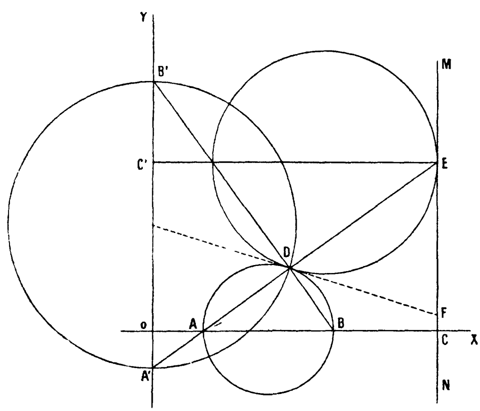
23. *Systèmes orthogonaux composés de cyclides du troisième ordre.* — Étudions maintenant les systèmes orthogonaux dont la représentation sphérique se compose de cercles passant tous par un même point de la sphère. Dans ce cas toutes les surfaces d'une même famille ont la même représentation sphérique qui se compose des cercles passant par un point de la sphère, et tangents en ce point à l'une ou l'autre de deux droites rectangulaires situées dans le plan tangent à la sphère et passant par le point de contact. Nous avons déjà vu (n° 11) que les cyclides correspondantes sont du troisième ordre et qu'elles admettent chacune deux plans circonscrits le long d'une droite et parallèles au plan tangent à la sphère au point par où passent tous les cercles de la représentation sphérique. Ces deux droites sont d'ailleurs parallèles aux droites (D) et (E) autour desquelles pivotent les plans des cercles de la représentation sphérique, et toutes les lignes de courbure des cyclides de la famille correspondante sont des cercles dont les plans passent par l'une de ces droites. Dans la représentation sphérique du système orthogonal, il y a trois réseaux de cercles orthogonaux, un pour chaque famille, et les six droites correspondantes sont parallèles aux trois axes de coordonnées, les deux

droites correspondant à une même famille étant tangentes à la sphère à l'une des extrémités d'un des diamètres de la sphère parallèles aux axes de coordonnées.

Il en résulte déjà que tous les plans circonscrits aux cyclides sont parallèles à l'un des plans de coordonnées et toutes les droites stationnaires parallèles à l'un des axes de coordonnées. Ensuite on démontrera comme au n° 14 que toutes les cyclides d'une même famille sont symétriques, chacune par rapport à deux des plans de coordonnées et deux à deux par rapport au troisième. Dès lors, le système peut être construit de la manière suivante :

Traçons dans le plan OXY une droite MN (*fig.* 5) parallèle à OY, coupant OX en C, et un cercle ayant

Fig. 5.



son centre sur OX et coupant cet axe en A et B. L'une des cyclides de la première famille pourra être définie par ce cercle et cette droite en choisissant A ou B pour pied de l'autre droite stationnaire. Ces droites stationnaires sont en même temps les axes radicaux de la cyclide. Par exemple, si l'on mène la droite ADE coupant le cercle AB en D et la droite MN en E, la cyclide sera le lieu des cercles ayant leurs plans perpendiculaires au plan OXY et admettant DE pour diamètre, lorsque la droite ADE pivote autour de A. La même cyclide pourrait encore être définie par le cercle du plan OXZ ayant CB pour diamètre, la parallèle menée par A à OZ, et le point C comme centre de pivotement.

L'une des cyclides de la seconde famille devra passer par le cercle de diamètre DE et sera symétrique par rapport au plan OXY. Mais la première cyclide est l'enveloppe des sphères dont les grands cercles situés dans le plan OXY sont tangents au cercle AB et à la droite MN. L'une de ces sphères a pour grand cercle le cercle tangent en D au cercle AB et en E à la droite MN. Alors la sphère orthogonale, circonscrite à la deuxième cyclide, aura son centre au point F, intersection de MN avec la tangente en D au cercle AB. Cette deuxième cyclide contenant le cercle DE aura l'un de ses axes radicaux dans le plan perpendiculaire au plan de la figure passant par DE, et puisque cet axe radical doit être parallèle à l'un des axes de coordonnées et situé dans l'un des plans de coordonnées, ce sera la parallèle à OZ projetée en A', intersection de la droite DE avec OY. L'autre axe radical sera parallèle à OX. Donc cette deuxième cyclide sera définie par un axe radical parallèle à OX, un centre de pivotement A' situé sur l'axe OY, et un cercle situé dans le plan OXY passant par A' et ayant son centre sur OY. Elle est alors complètement déterminée.

D'abord, le centre de pivotement A' est, comme on vient de le voir, à l'intersection de ED avec OY. L'axe radical devant être tangent à la sphère de centre F en un point du cercle DE passe nécessairement par E; c'est la parallèle à OX menée par E, laquelle coupe OY en C'. Enfin, le cercle passant par A' dans le plan OXY doit passer aussi par D, puisque ED est le diamètre de l'un des cercles de la cyclide dont le plan est perpendiculaire à OXY. Il coupera donc OY en un second point B' qu'on obtient par l'intersection de OY avec la droite BD perpendiculaire à ED. Ce cercle est bien, comme il doit être, tangent au cercle de centre F, car il est orthogonal au cercle AB, puisqu'il est circonscrit au triangle A'DB' lequel a ses côtés respectivement perpendiculaires à ceux du triangle ADB auquel est circonscrit le cercle AB, d'où il suit qu'on passe de l'un à l'autre par une homothétie suivie d'une rotation d'un angle droit.

En faisant pivoter la droite A'DE autour de A', on construira ainsi toutes les cyclides de la seconde famille. Celles de la troisième s'obtiendront de la même manière en remplaçant respectivement le cercle AB, la droite MN et le centre de pivotement A dans le plan OXY, par le cercle BC, la parallèle à OZ menée par A et le centre de pivotement C dans le plan OXZ. Enfin les cyclides de la première famille se construisent de la même manière en partant d'une de celles de la seconde ou de la troisième famille.

24. *Le système est bien orthogonal.* — Pour vérifier que le système ainsi formé est bien orthogonal, considérons un point M de la cyclide initiale. Par ce point passent deux cercles de courbure DE et $\delta\varepsilon$. Une cyclide de la seconde famille passe par DE, une de la troisième par $\delta\varepsilon$ et ces deux-là coupent orthogonalement la surface initiale d'après la construction même. De plus, elles sont orthogonales entre elles au

point M puisque leurs intersections DE et $\delta\varepsilon$ sur la cyclide initiale sont perpendiculaires.

Alors, en reprenant, avec des modifications faciles, le raisonnement qui termine le n° 17, on démontrera que toute cyclide de la deuxième famille coupe chaque cyclide de la troisième famille orthogonalement suivant un cercle de courbure et réciproquement.

Supposons maintenant que la première famille ait été construite au moyen d'une cyclide (C_2) de la deuxième famille. Cette cyclide (C_2) coupe une des cyclides (C_3) de la troisième famille suivant un cercle de courbure (S_1). Soit N un point du cercle (S_1). Par ce point N passent sur les deux cyclides (C_2) et (C_3) deux autres cercles de courbure (S_3) et (S_2), et les tangentes à ces trois cercles au point N forment un trièdre trirectangle, puisque les cyclides (C_2) et (C_3) sont orthogonales et que les cercles de courbure d'une même cyclide sont orthogonaux. L'une des cyclides (C_1) de la première famille passe par le cercle (S_3) et est orthogonale à la cyclide (C_2). Donc son plan tangent contient la tangente à (S_3) et est perpendiculaire au plan des tangentes à (S_3) et (S_1). C'est donc une des faces du trièdre trirectangle et les trois cyclides sont orthogonales au point N.

Le raisonnement du n° 17 montre alors que les cyclides (C_1) et (C_3) se coupent suivant un cercle le long duquel elles sont orthogonales. Ainsi toutes les cyclides de la première famille coupent orthogonalement celles de la troisième.

Considérons enfin deux cyclides (C'_1) et (C'_3) des familles 1 et 3 se coupant orthogonalement suivant un cercle (S'_2) et admettant deux autres cercles de courbure (S'_3) et (S'_1). Nous savons déjà que par (S'_1) situé sur (C'_3) passe une cyclide de la seconde famille orthogonale à (C'_3). La répétition du raisonnement précédent montrera qu'elle est orthogonale à (C'_1), de sorte que toute cyclide de la seconde famille est orthogonale à toutes les cyclides de la première et ainsi se trouve achevée la démonstration.

La construction indiquée au n° 23 montre que la deuxième cyclide est complètement déterminée par le cercle DE situé sur la première, d'où il suit que la deuxième famille est complètement déterminée par une seule cyclide de la première ; mais puisque toutes les cyclides de la deuxième famille sont orthogonales à toutes celles de la première, on retrouvera la même deuxième famille si l'on applique la construction du n° 23 à l'une quelconque des cyclides de la première famille, et plus généralement, le système complet peut être déduit, par la construction indiquée, d'une seule cyclide, pourvu qu'on donne en même temps l'origine des coordonnées sur la perpendiculaire commune aux axes radicaux de cette cyclide.

25. *Dispositions des cyclides. Réalité des points coniques.* — On peut faire deux remarques utiles sur les formes des cyclides et leur intersection avec les plans de coordonnées.

Les raisonnements du n° 18 relatifs aux points coniques des cyclides du quatrième ordre s'appliquent sans changement aux cyclides du troisième ordre ; mais celles-ci coupent suivant des coniques les plans parallèles à leurs plans circonscrits. Donc :

Toutes les cyclides d'une même famille coupent suivant une même conique celui des trois plans de coordonnées par rapport auquel elles ne sont pas symétriques. Cette conique est le lieu des points coniques des deux autres familles situées dans ce plan-là. Il y a ainsi trois coniques situées chacune dans un des plans de coordonnées, dont chacune est focale des deux autres. L'une est une ellipse réelle située par exemple dan le plan OYZ et ayant ses foyers réels sur OZ ; la seconde, une hyperbole située dans le plan OXZ ayant pour sommets réels les foyers de l'ellipse précédente, et pour foyers réels les sommets da la même ellipse sur l'axe OZ. La troisième est une ellipse imaginaire située dans le plan OXY et admettant pour sommets les foyers imaginaires de l'ellipse et de l'hyperbole précédentes.

On en conclut qu'aucune des cyclides du système n'a de points coniques réels dans le plan OXY.

Appelons première famille celle des cyclides qui ont leurs plans circonscrits parallèles à OYZ. Celles-là passent toutes par l'ellipse située dans ce plan-là, et ont leurs points coniques réels sur l'hyperbole située dans le plan OZX, laquelle a pour axe transverse l'axe OZ. Les deux axes radicaux de ces cyclides sont parallèles à OY et à OZ. Ce dernier rencontre toujours l'hyperbole. Donc, les cyclides de la première famille ont toutes leurs points coniques réels sur des axes radicaux parallèles, ce qui du reste résultait aussi de ce fait qu'elles admettent une section elliptique par le plan OYZ.

Les cyclides de la deuxième famille seront celles dont les plans circonscrits sont parallèles au plan OZX. Elles passent toutes par l'hyperbole précédente et ont leurs points coniques sur l'ellipse ; mais l'axe radical parallèle à OX peut occuper toutes les positions possibles comme cela résulte de la construction du n° 23 ; il arrive donc qu'il coupe ou ne coupe pas l'ellipse en deux points réels. Donc les cyclides de la seconde famille ont leurs points coniques tantôt imaginaires et tantôt réels sur des axes radicaux parallèles. Il y en a deux qui ont leurs points coniques confondus.

Enfin, la troisième famille comprend les cyclides dont les axes radicaux sont parallèles à OX et à OY ; celles-là coupent le plan OXY suivant l'ellipse imaginaire, et elles ont leurs points coniques les unes sur l'ellipse, les autres sur l'hyperbole. Comme une cyclide n'a pas plus de deux points coniques réels, si l'axe radical parallèle à OX coupe l'hyperbole, l'axe radical parallèle à OY ne coupera pas l'hyperbole ; mais il peut se faire qu'aucune de ces deux droites ne coupe la conique correspondante, et cela arrivera nécessairement pour certaines cyclides de la famille, car autrement, on aurait un cas limite où l'une des droites serait tangente à l'ellipse et l'autre à l'hyperbole et par suite une cyclide ayant deux points coniques doubles, ce qui est impossible.

Ainsi, il n'existe pas de famille composée exclusivement de cyclides sans points coniques réels, sauf un cas particulier sur lequel nous reviendrons plus loin.

(*A suivre.*)