DE SPARRE

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1911)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 549-567

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__549_0>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1911).

COMPOSITION DE MÉCANIQUE.

SOLUTION PAR M. LE COMTE DE SPARRE.

Une boule pesante rencontre le sol supposé horizontal. On demande d'étudier son mouvement ultérieur à partir du moment où la boule touche le sol.

I. *On supposera la boule sphérique et homogène. On négligera la résistance de l'air et les frottements de roulement et de pivotement. On admettra l'hypothèse de Newton d'après laquelle la composante verticale de la vitesse du point μ de la boule qui vient en contact avec le sol se trouve multipliée immédiatement après la rencontre avec le sol par un facteur négatif $-e$ qui ne dépend que de la nature des surfaces en contact avec* $0 \leqq e \leqq 1$.

II. *La discussion devra mettre surtout en évidence s'il y a glissement ou non glissement dans le contact. Elle montrera que la forme de la trajectoire du centre C de la boule dépend essentiellement (pour des substances données) de l'angle θ_1 de la verticale descendante avec la vitesse initiale du point μ fixe sur la boule, qui vient en contact avec le sol.*

III. *On appellera m la masse de la boule, ρ son* *rayon, f le coefficient de frottement de la boule contre le sol. On prendra comme origine des axes fixes la position initiale O du centre C de la boule quand elle arrive au sol et comme axe Oz une verticale ascendante. On appellera $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, p_1, q_1, r_1$ les projections de la vitesse de C et de la vitesse angulaire de rotation instantanée de la boule au moment où elle touche le sol; $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1, p'_1, q'_1, r'_1$ les valeurs de ces projections après la rencontre; v_1 et v'_1 les valeurs initiale et finale au moment de la rencontre avec le sol de la composante horizontale de la vitesse du point μ*

$$\left(\operatorname{tang}\theta_1 = \frac{v_1}{-\gamma_1}\right).$$

Comme application de la discussion, on pourra indiquer, en supposant $e=\frac{1}{2}$, $f=\frac{2}{7}$ les formes de la trajectoire de C, pour

$$\operatorname{tang}\theta_1 = 1, \qquad \operatorname{tang}\theta_1 = \frac{5}{2} \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{tang}\theta_1 = 4.$$

On pourra aussi examiner le cas où

$$\beta_1 = p_1 = 0, \qquad \operatorname{tang}\theta_1 < \frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad \left(v_1 - \frac{7}{2}\alpha_1\right)$$

nul ou très petit.

Nous prendrons l'axe Ox parallèle à la composante horizontale de la vitesse du point μ et dans le sens de cette vitesse, à l'instant où ce point rencontre le sol, de sorte que nous aurons

$$\beta_1 + p_1\rho = 0, \qquad \alpha_1 - q_1\rho > 0.$$

La force de frottement qui s'exerce en μ au moment du choc sera donc parallèle à Ox et de sens contraire.

Désignons par P et Q les composantes de la percussion qui s'exerce en μ au moment du choc, Q sera parallèle à Ox et de sens contraire, P parallèle à Oz.

Écrivons alors qu'il y a équilibre entre les quantités de mouvement initiales, les forces de percussion et les quantités de mouvement finales prises en signes contraires, et prenons les moments par rapport au point μ; nous aurons

$$m(\alpha_1 - \alpha'_1) + Q = 0, \qquad m(\beta_1 - \beta'_1) = 0, \qquad m(\gamma_1 - \gamma'_1) + P = 0,$$

$$\frac{2}{5} m \rho^2 p_1 - m \beta_1 \rho = \frac{2}{5} m \rho^2 p'_1 - m \beta'_1 \rho,$$

$$\frac{2}{5} m \rho^2 q_1 + m \alpha_1 \rho = \frac{2}{5} m \rho^2 q'_1 + m \alpha'_1 \rho,$$

$$\frac{2}{5} m \rho^2 r_1 = \frac{2}{5} m \rho^2 r'_1.$$

On déduit d'abord de ces équations

$$\beta'_1 = \beta_1, \qquad p'_1 = p_1, \qquad r'_1 = r_1.$$

On a d'ailleurs par hypothèse

$$\gamma'_1 = - e \gamma_1$$

et l'on conclut alors des équations précédentes

$$(1) \qquad P = - m \gamma_1 (1 + e),$$

$$(2) \qquad \alpha'_1 = \alpha_1 + \frac{Q}{m},$$

$$(3) \qquad q'_1 = q_1 + \frac{5}{2} \frac{\alpha_1 - \alpha'_1}{\rho} = q_1 - \frac{5}{2} \frac{Q}{m \rho}.$$

On a d'ailleurs, avec les hypothèses faites,

$$v_1 = \alpha_1 - q_1 \rho > 0, \qquad Q < 0.$$

Après le choc on a, en vertu des équations précédentes,

$$\beta'_1 + p'_1 \rho = \beta_1 + p_1 \rho = 0,$$

de sorte que la vitesse du point μ après le choc, si elle n'est pas nulle, est parallèle à Ox, comme avant, on a d'ailleurs pour cette vitesse

$$v'_1 = \alpha'_1 - q'_1\rho = \alpha_1 - q_1\rho - \frac{7}{2}\frac{Q}{m} = v_1 + \frac{7}{2}\frac{Q}{m}.$$

Nous devons maintenant distinguer deux cas :

1° Il y a glissement au moment du choc.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut $v'_1 > 0$ et l'on aura alors, Q étant négatif,

$$-Q = Pf = -m(1+e)f\gamma_1$$

On aura alors en vertu des équations (2) et (3)

$$\alpha'_1 = \alpha_1 - (1+e)\gamma_1 f,$$

$$q'_1 = q_1 - \frac{5}{2}\frac{1+e}{\rho}\gamma_1 f,$$

$$v'_1 = v_1 + \frac{7}{2}(1+e)\gamma_1 f$$

et toujours

$$p'_1 = p_1, \qquad \beta'_1 = \beta_1, \qquad r'_1 = r_1.$$

D'ailleurs, d'après ce que nous avons dit, pour qu'il y ait glissement, il faut $v'_1 > 0$, ce qui donne

$$v_1 - \frac{7}{2}(1+e)\gamma_1 f > 0;$$

mais en posant

$$\operatorname{tang}\theta_1 = \frac{v_1}{-\gamma_1},$$

cette condition devient

$$\operatorname{tang}\theta_1 > \frac{7}{2}f(1+e)$$

Après le choc, la boule rebondit avec une vitesse $-\gamma_1 e$ et, puisque l'on néglige la résistance de l'air, son centre décrit un arc de parabole situé dans un plan vertical, les composantes horizontales de la vitesse ainsi que celles de la rotation restant sans changements jusqu'au choc suivant. La boule rencontrera de nouveau le sol au bout d'un temps égal à $-\frac{2\gamma_1 e}{g}$ et la composante verticale de la vitesse du point C sera à cet instant $\gamma_1 e$. De plus, comme la vitesse de la projection horizontale est constante pendant ce premier bond, ce point aura parcouru, parallèlement à Ox, une distance

$$-\frac{2\gamma_1 e}{g}\alpha_1 = -\frac{2\gamma_1 e}{g}[\alpha_1 + \gamma_1(1+e)f],$$

et parallèlement à Oy une distance

$$-\frac{2\gamma_1 e}{g}\beta'_1 = -\frac{2\gamma_1 e}{g}\beta_1.$$

Ce que nous venons de dire pour le premier bond s'applique en réalité pour un bond quelconque *tant qu'il y aura glissement*. Désignons alors par α_n, β_n, γ_n, p_n, q_n, r_n les projections de la vitesse de C et de la vitesse de rotation instantanée de la boule au moment où il touche le sol et par α'_n, β'_n, γ'_n, p'_n, q'_n, r'_n les valeurs de ces projections après la rencontre, au début du $n^{\text{ième}}$ bond et supposons qu'il y ait encore glissement pendant cette $n^{\text{ième}}$ rencontre, nous aurons alors, en vertu de ce qui précède,

$$\gamma'_n = -e\gamma_n, \qquad \gamma_{n+1} = -\gamma'_n = e\gamma_n,$$
$$\alpha'_n = \alpha_{n+1} = \alpha_n + (1+e)f\gamma_n,$$
$$\beta'_n = \beta_n = \beta_1,$$
$$p'_n = p_n = p_1,$$
$$r'_n = r_n = r_1,$$
$$q'_n = q_n - \frac{5}{2}\,\frac{1+e}{\rho}\,f\gamma_n,$$
$$v'_n = v_n + \frac{7}{2}(1+e)f\gamma_n.$$

Désignons de plus par x_n et y_n les coordonnées de C au début du $n^{\text{ième}}$ bond, nous aurons

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2e\gamma_n}{g}\alpha'_n,$$
$$y_{n+1} = y_n - \frac{2e\gamma_n}{g}\beta_1.$$

D'ailleurs si t_n est la durée du $n^{\text{ième}}$ bond, on a

$$t_n = -\frac{2e\gamma_n}{g}.$$

On déduit des formules précédentes, d'abord

$$\gamma_n = e^{n-1}\gamma_1, \qquad t_n = -\frac{2e^n\gamma_1}{g};$$

puis successivement

$$\alpha'_1 = \alpha_1 + (1+e)\ \gamma_1 f,$$
$$\alpha'_2 = \alpha'_1 + (1+e)e\gamma_1 f,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\alpha'_n = \alpha'_{n-1} + (1+e)e^{n-1}\gamma_1 f,$$

d'où en ajoutant

$$\alpha'_n = \alpha_1 + (1+e)\gamma_1 f(1+e+e^2+\ldots+e^{n-1})$$

ou

(4) $$\alpha'_n = \alpha_1 + (1+e)\gamma_1 f\frac{1-e^n}{1-e} = \alpha_{n+1}.$$

On aura d'une façon semblable

(5) $$q'_n = q_1 - \frac{5}{2}\,\frac{(1+e)\gamma_1 f}{\rho}\,\frac{1-e^n}{1-e} = q_{n+1},$$

(6) $$v'_n = v_1 + \frac{7}{2}(1+e)f\gamma_1\,\frac{1-e^n}{1-e} = v_{n+1}.$$

Nous aurons ensuite

$$x_2 - x_1 = -\frac{2e\gamma_1}{g}\alpha'_1 = -\frac{2e\gamma_1}{g}[\alpha_1 + (1+e)\gamma_1 f]$$
$$= -\frac{2e\gamma_1}{g}\left[\alpha_1 + (1+e)\gamma_1 f\frac{1-e}{1-e}\right],$$
$$x_3 - x_2 = -\frac{2e\gamma_2}{g}\alpha'_2 = -\frac{2e^2\gamma_1}{g}\left[\alpha_1 + (1+e)\gamma_1 f\frac{1-e^2}{1-e}\right],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$x_{n+1} - x_n = -\frac{2e^n\gamma_1}{g}\left[\alpha_1 + (1+e)\gamma_1 f\frac{1-e^n}{1-e}\right],$$

d'où l'on déduit en ajoutant

$$x_{n+1} - x_1 = -\frac{2e\gamma_1}{g}\left(\alpha_1 + \frac{1+e}{1-e}\gamma_1 f\right)(1+e+e^2+\ldots+e^{n-1})$$
$$+ \frac{2e^2\gamma_1^2}{g}\frac{1+e}{1-e}f(1+e^2+e^4+\ldots+e^{2n-2})$$
$$= -\frac{2e\gamma_1}{g}\left(\alpha_1 + \frac{1+e}{1-e}\gamma_1 f\right)\frac{1-e^n}{1-e}$$
$$+ \frac{2e^2\gamma_1^2}{g}f\frac{1+e}{1-e}\frac{1-e^{2n}}{1-e^2},$$

ou enfin, en remarquant que l'on suppose $x_1 = y_1 = 0$,

$$(7)\qquad x_{n+1} = -\frac{2e\gamma_1}{g}\left(\alpha_1 + \frac{1+e}{1-e}\gamma_1 f\right)\frac{1-e^n}{1-e}$$
$$+ \frac{2e^2\gamma_1^3}{g}f\frac{1-e^{2n}}{(1-e)^2}.$$

De même

$$y_2 - y_1 = -\frac{2e\gamma_1\beta_1}{g},$$
$$y_3 - y_2 = -\frac{2e^2\gamma_1\beta_1}{g},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$y_{n+1} - y_n = -\frac{2e^n\gamma_1\beta_1}{g};$$

d'où, puisque $y_1 = 0$,

$$(8)\qquad y_{n+1} = -\frac{2e\gamma_1}{g}\beta_1\frac{1-e^n}{1-e},$$

et, enfin en posant,

$$T_n = t_1 + t_2 + \ldots + t_n,$$

on aura

(9) $$T_n = -\frac{2e\gamma_1}{g}\,\frac{1-e^n}{1-e}.$$

Ces formules ne doivent toutefois être appliquées que tant qu'on a

$$v'_n = v_1 + \frac{7}{2}(1-e)\gamma_1 f\,\frac{1-e^n}{1-e} > 0,$$

ou, sous une autre forme,

(10) $$\operatorname{tang}\theta_1 > \frac{7}{2}\,\frac{1+e}{1-e}\,f(1-e^n).$$

On tire de l'équation (8)

$$\frac{1-e^n}{1-e} = -\frac{g y_{n+1}}{2e\gamma_1\beta_1},$$

puis

$$\frac{1-2e^n+e^{2n}}{(1-e)^2} = 2\,\frac{1-e^n}{(1-e)^2} - \frac{1-e^{2n}}{(1-e)^2} = \frac{g^2 y_{n+1}^2}{4e^2\gamma_1^2\beta_1^2},$$

d'où

$$\frac{1-e^{2n}}{(1-e)^2} = -\frac{g y_{n+1}}{e(1-e)\gamma_1\beta_1} - \frac{g^2 y_{n+1}^2}{4e^2\gamma_1^2\beta_1^2}.$$

En portant ces valeurs dans (7), on aura, toutes réductions faites,

$$x_{n+1} = \frac{\alpha_1+\gamma_1 f}{\beta_1}\,y_{n+1} - \frac{g f y_{n+1}^2}{2\beta_1^2}.$$

On voit que les projections sur le plan des x, y des points de contact successifs, tant qu'il y a glissement, se trouvent sur la parabole

(11) $$x = \frac{\alpha_1+\gamma_1 f}{\beta_1}\,y - \frac{g f}{2\beta_1^2}\,y^2.$$

La projection horizontale de C décrit des cordes successives de cette parabole, chaque corde correspondant à un bond.

On peut remarquer que l'équation de cette parabole ne dépend pas de e.

Comme nous l'avons dit, les formules précédentes ne doivent être appliquées que tant que l'inégalité (10) est satisfaite.

On est, par suite, conduit à partager le cas actuel en deux, suivant que l'inégalité (10) est ou n'est pas satisfaite pour n infini.

I.

La relation (10) est satisfaite pour n infini, c'est-à-dire qu'on a, puisque $e < 1$,

$$\tag{12} \operatorname{tang} \theta_1 > \frac{7}{2} \frac{1+e}{1-e} f.$$

Dans ce cas, la boule fait un nombre infini de bonds, pendant la période de glissement, et v'_n n'étant pas nul pour n infini, il y aura encore glissement lorsque la vitesse verticale sera devenue nulle. D'ailleurs les valeurs de α'_n, β'_n, x_n, y_n et T_n sont finies pour n infini; on aura, en vertu des formules établies plus haut,

$$\alpha'_\infty = \alpha_1 + \frac{1+e}{1-e} \gamma_1 f, \qquad \beta'_\infty = \beta_1,$$

$$p'_\infty = p_1, \qquad q'_\infty = q_1 - \frac{5}{2} \frac{1+e}{1-e} \frac{\gamma_1 f}{\rho}$$

$$\begin{aligned} x_\infty &= -\frac{2e\gamma_1}{g(1-e)} \left(\alpha_1 + \frac{1+e}{1-e} \gamma_1 f \right) + \frac{2e^2\gamma_1^2}{g(1-e)^2} f \\ &= -\frac{2e\gamma_1}{g(1-e)} \left(\alpha_1 + \frac{\gamma_1 f}{1-e} \right), \end{aligned}$$

$$y_\infty = -\frac{2e\gamma_1\beta_1}{g(1-e)}, \qquad T_\infty = -\frac{2e\gamma_1}{g(1-e)}, \qquad \gamma'_\infty = 0.$$

A partir de ce moment, le mouvement du point C se fait dans le plan horizontal et est, comme on sait, parabolique tant que le glissement persiste; on a d'ailleurs, à partir de cet instant et tant qu'il y a glissement,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = gf, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

Comme, de plus, on a pour les valeurs initiales en posant

$$t' = t - T_\infty,$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \alpha'_\infty = \alpha_1 + \frac{1+e}{1-e}\gamma_1 f, \qquad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = \beta_1,$$

$$x_0 = x_\infty = -\frac{2e\gamma_1}{g(1-e)}\left(\alpha_1 + \frac{\gamma_1 f}{1-e}\right),$$

$$y_0 = y_\infty = -\frac{2e\gamma_1\beta_1}{g(1-e)},$$

nous aurons

$$(13) \qquad x = -\frac{2e\gamma_1}{g(1-e)}\left(\alpha_1 + \frac{\gamma_1 f}{1-e}\right) + \left(\alpha_1 + \frac{1-e}{1-e}\gamma_1 f\right)t' - \frac{gft'^2}{2},$$

$$(14) \qquad y = -\frac{2e\gamma_1\beta_1}{g(1-e)} + \beta_1 t'.$$

En éliminant t' entre ces deux équations, on aura alors, toutes réductions faites,

$$x = \frac{\alpha_1 + \gamma_1 f}{\beta_1} y - \frac{gf}{2\beta_1^2} y^2.$$

C'est l'équation de la parabole (11), lieu des positions du point C à la fin de chacun des bonds. On voit que, lorsque la vitesse verticale est annulée, le point de contact de la boule et du plan se produit, tant que le glissement persiste, sur la parabole, lieu des points de contacts, lors des bonds précédents.

On a d'ailleurs, pendant cette période, au moyen du théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à des axes parallèles aux axes fixes passant par C,

$$\frac{2}{5} m\rho^2 \frac{dq}{dt} = mgf\rho, \qquad \frac{dp}{dt} = \frac{dr}{dt} = 0;$$

d'où l'on déduit, puisque $q_0 = q_\infty$,

$$(15)\quad q = q_0 + \frac{5}{2}\frac{gf}{\rho}t' = q_1 - \frac{5}{2}\frac{1+e}{1-e}\frac{\gamma_1 f}{\rho} + \frac{5}{2}\frac{gf}{\rho}t',$$

$$p = p_0 = p_1,$$

$$r = r_0 = r_1.$$

On a d'ailleurs, pour la vitesse v'_x du point de contact,

$$v'_x = \frac{dx}{dt} - q\rho = \alpha_1 + \frac{1+e}{1-e}\gamma_1 f - gft' - q_1\rho$$

$$+ \frac{5}{2}\frac{1+e}{1-e}\gamma_1 f - \frac{5}{2}gft',$$

mais comme, à l'instant initial,

$$v_1 = \alpha_1 - q_1\rho,$$

on a, en définitive,

$$v'_x = v_1 + \frac{7}{2}\frac{1+e}{1-e}\gamma_1 f - \frac{7}{2}gft'.$$

Cette vitesse devient nulle pour une valeur τ de t' fournie par l'équation

$$\tau = \frac{v_1 + \frac{7}{2}\frac{1+e}{1-e}\gamma_1 f}{\frac{7}{2}gf} = -\gamma_1\frac{\operatorname{tang}\theta_1 - \frac{7}{2}\frac{1+e}{1-e}f}{\frac{7}{2}gf},$$

valeur qui est positive en vertu de la relation (12).

On a d'ailleurs

$$t = T_\infty + \tau.$$

A partir de cet instant, il y aura roulement sans glissement et le centre de la boule aura un mouvement rectiligne et uniforme.

II.

Supposons maintenant que l'inégalité (12) ne soit pas satisfaite, bien que, au début, il y ait glissement, c'est-à-dire qu'on ait

$$(16) \qquad \frac{7}{2}(1+e)f < \operatorname{tang}\theta_1 < \frac{7}{2}\,\frac{1+e}{1-e}f,$$

il y aura alors une valeur de n pour laquelle on aura

$$(17) \qquad \frac{7}{2}\,\frac{1+e}{1-e}f(1-e^{n-1}) < \operatorname{tang}\theta_1 \leqq \frac{7}{2}\,\frac{1+e}{1-e}f(1-e^{n});$$

alors la vitesse v'_n du point de contact μ deviendra nulle au début du $n^{\text{ième}}$ bond, pour la valeur T_{n-1} du temps donné par la formule (9), les valeurs correspondantes de x_n et y_n se déduisant des formules (7) et (8).

2° Examinons maintenant ce qui se passe lorsqu'il y a roulement sans glissement.

Si le phénomène se produit au début du $n^{\text{ième}}$ bond (¹), la valeur de n vérifie la relation (17) si n est plus grand que 1; si au lieu de cela le roulement sans glissement se produit dès le début (²), on a

$$\operatorname{tang}\theta_1 \leqq \frac{7}{2}(1+e)f.$$

On a, en tout cas, pour cette valeur de n

$$(18) \qquad v'_n = \alpha'_n - \rho q'_n = 0.$$

(¹) Qui pourrait être le premier.
(²) Auquel cas $n = 1$.

On a d'ailleurs toujours [1]

$$m(\alpha_n - \alpha'_n) + Q = 0, \qquad \beta_n = \beta'_n, \qquad p_n = p'_n, \qquad r_n = r'_n,$$
$$m(\gamma_n - \gamma'_n) + P = 0,$$
$$\frac{2}{5} m\rho^2 q_n + m\alpha_n \rho = \frac{2}{5} m\rho^2 q'_n + m\alpha'_n \rho.$$

On déduit de ces équations jointes à l'équation (18)

$$(19) \qquad \alpha'_n = \rho q'_n = \frac{5}{7}\alpha_n + \frac{2}{7}\rho q_n,$$
$$(20) \qquad -Q = \frac{2}{7} m(\alpha_n - \rho q_n) = \frac{2}{7} m v_n,$$
$$(21) \qquad P = -m(1+e)\gamma_n = -m(1+e)e^{n-1}\gamma_1,$$

car on a toujours

$$(22) \qquad \gamma_n = e^{n-1}\gamma_1.$$

On a d'ailleurs, ainsi que cela doit être, dans le cas actuel

$$-Q \leqq Pf$$

ou

$$\frac{2}{7} m v_n \leqq -m\gamma_n(1+e)f.$$

En effet, en vertu de la formule (6) et de l'inégalité (17),

$$v_n + \frac{7}{2}(1+e)\gamma_n f$$
$$= v_1 + \frac{7}{2}(1+e)f\gamma_1 \frac{1-e^{n-1}}{1-e} + \frac{7}{2}(1+e)e^{n-1}\gamma_1 f$$
$$= v_1 + \frac{7}{2}(1+e)f\gamma_1 \frac{1-e^n}{1-e} \leqq 0.$$

On a de plus dans le cas actuel, en vertu des équa-

---

[1] Les équations du mouvement du centre de gravité et celles des mouvements par rapport aux axes parallèles aux axes fixes passant par μ subsistant sans changement.

tions (19), (4) et (5),

$$\alpha'_n = \frac{5}{7}\left[\alpha_1 + (1+e)\gamma_1 f \frac{1-e^{n-1}}{1-e}\right] + \frac{2}{7}\left[\rho q_1 - \frac{5}{2}(1+e)\gamma_1 f \frac{1-e^{n-1}}{1-e}\right]$$

ou

$$(23) \qquad \alpha'_n = \frac{5}{7}\alpha_1 + \frac{2}{7}\rho q_1.$$

On voit que la vitesse du point C, au moment où le roulement sans glissement se produit, dépend seulement de la vitesse initiale et est indépendante du glissement qui a pu se produire avant.

Dans le cas actuel, du roulement sans glissement, le mouvement de la projection horizontale de C est rectiligne et uniforme avec une vitesse qui a pour composante α'_n parallèlement à Ox, et β_1 parallèlement à Oy. Dans l'espace, le point C décrit, dans le plan vertical qui projette ce point et dont nous venons de parler, une série d'arcs de parabole, correspondant à chacun des bonds successifs.

Pour l'arc qui correspond au $n^{\text{ième}}$ bond, on a

$$(24) \qquad x_{n+1} - x_n = -\frac{2e^n\gamma_1}{g}\left(\frac{5}{7}\alpha_1 + \frac{2}{7}\rho q_1\right),$$

$$(25) \qquad y_{n+1} - y_n = -\frac{2e^n\gamma_1}{g}\beta_1,$$

et la flèche correspondante est

$$(26) \qquad z_n = \frac{\gamma_1^2 e^{2n}}{2g}.$$

La valeur de T est d'ailleurs toujours donnée par la formule (9)

$$T_n = -\frac{2e\gamma_1}{g}\,\frac{1-e^n}{1-e}$$

et les bonds cesseront pour n infini, donc pour la valeur

$$T_\infty = -\frac{2e\gamma_1}{g(1-e)},$$

instant à partir duquel il y aura roulement sans glissement.

Considérons un point H situé à une distance égale à $\frac{2}{5}\rho$ au-dessus de C [1], les composantes de la vitesse horizontale de ce point seront :

1° Tant qu'il y a glissement et que la composante verticale de la vitesse n'est pas nulle,

$$\alpha'_n + \frac{2}{5}\rho q'_n \quad \text{et} \quad \beta_1 - \frac{2}{5}\rho p_1 = \frac{7}{5}\beta_1,$$

c'est-à-dire, en vertu des formules (4) et (5),

$$\alpha_1 + \frac{2}{5}\rho q_1 \quad \text{et} \quad \beta_1 - \frac{2}{5}\rho p_1 = \frac{7}{5}\beta_1.$$

Ces composantes sont donc constantes.

2° Lorsque la composante verticale de la vitesse est nulle, les composantes horizontales de la vitesse de H sont

$$\frac{dx}{dt} + \frac{2}{5}\rho q \quad \text{et} \quad \beta_1 - \frac{2}{5}\rho p_1 = \frac{7}{5}\beta_1,$$

c'est-à-dire, en vertu des formules (13) et (15),

$$\alpha_1 + \frac{2}{5}\rho q_1 \quad \text{et} \quad \beta_1 - \frac{2}{5}\rho p_1 = \frac{7}{5}\beta_1.$$

Ces composantes sont donc encore constantes et égales à ce qu'elles sont dans le premier cas.

---

[1] C'est le centre d'oscillation pour un axe de suspension tangent à la sphère en μ.

3° Enfin lorsqu'il y a roulement sans glissement, au moment du choc, ces composantes sont

$$\alpha'_n + \frac{2}{5}\rho q'_n = \frac{7}{5}\alpha'_n \qquad \text{et} \qquad \beta_1 - \frac{2}{5}\rho p_1 = \frac{7}{5}\beta_1,$$

c'est-à-dire, en vertu de la formule (23),

$$\alpha_1 + \frac{2}{5}\rho q_1 \qquad \text{et} \qquad \frac{7}{5}\beta_1,$$

valeurs encore égales à celles obtenues dans les cas précédents.

On voit donc que les composantes horizontales de la vitesse du point de la boule qui se trouve en H sont constantes comme grandeur et direction pendant toute la suite du phénomène. D'ailleurs, au moment où le roulement sans glissement se produit, la vitesse finale du point C est parallèle à celle du point H et égale aux $\frac{5}{7}$ de cette vitesse; ces composantes de la vitesse finale de C sont donc

$$\frac{5}{7}\alpha_1 + \frac{2}{7}\rho q_1 \qquad \text{et} \qquad \beta_1.$$

C'est le résultat auquel nous étions déjà arrivé.

Reste à examiner les cas particuliers où

$$e = \frac{1}{2}, \qquad f = \frac{2}{7},$$

d'où

$$\frac{7}{2}(1+e)f = \frac{3}{2},$$

donc :

1° Si $\tang\theta_1 = 1$, on a

$$\tang\theta_1 < \frac{7}{2}f(1+e),$$

et il y a roulement sans glissement dès le début du mouvement, et, en projection horizontale, le mouvement de C est rectiligne et uniforme, le point C décrivant dans chaque bond un arc de parabole conformément aux formules (24), (25) et (26).

2° Si $\tang\theta_1 = \frac{5}{2}$, comme $\frac{7}{2}f(1+e) = \frac{2}{3}$, on a

$$\tang\theta_1 > \frac{7}{2}f(1+e).$$

Il y a donc roulement sans glissement pendant les premiers bonds.

Toutefois,

$$\frac{7}{2}\frac{1+e}{1-e}f = 3,$$

de sorte que

$$\tang\theta_1 < \frac{7}{2}\frac{1+e}{1-e}f.$$

Le roulement sans glissement se produira donc au bout d'un nombre fini de bonds pour la valeur de n pour laquelle on aura [formule (17)]

$$3\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] < \tang\theta_1 \leqq 3\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right],$$

relation qui, puisque $\tang\theta_1 = \frac{5}{2}$, sera satisfaite pour $n = 3$, car on a

$$\frac{9}{4} < \frac{5}{2} < \frac{21}{8}.$$

La boule exécutera donc deux bonds pendant lesquels il y aura glissement et le roulement sans glissement se produira au début du troisième bond, les deux premiers points de contact se projetant horizontalement sur la parabole (11).

3° Si $\tang\theta_1 = 4$, comme $\frac{7}{2}\frac{1+e}{1-e}f = 3$, on a

$$\tang\theta_1 > \frac{7}{2}\frac{1+e}{1-e}f.$$

Il y aura glissement pendant tous les bonds et ces bonds, en nombre infini, seront suivis d'une période de glissement pendant laquelle le point C décrit, d'après ce que nous avons vu, un arc de parabole (11) qui est le prolongement de celui de la même parabole sur lequel se trouvait le point C pendant chacun des chocs précédents.

4° Si $v_1 - \frac{7}{2}\alpha_1 = 0$ avec $\beta_1 = p_1 = 0$,

$$\operatorname{tang}\theta_1 < \frac{3}{2}.$$

La dernière condition fait d'abord voir qu'il y aura roulement sans glissement pendant les chocs dès le début. La vitesse de C est parallèle à Ox, puisque $\beta_1 = p_1 = 0$, et l'on a pour sa valeur

$$\alpha'_1 = \frac{5}{7}\alpha_1 + \frac{2}{7}\rho q_1,$$

d'ailleurs par hypothèse

$$v_1 = \frac{7}{2}\alpha_1 = \alpha_1 - \rho q_1,$$

d'où

$$\rho q_1 = -\frac{5}{2}\alpha_1;$$

donc $\alpha'_1 = 0$ et aussi, puisqu'il y a roulement sans glissement,

$$q'_1 = \frac{\alpha'_1}{\rho} = 0.$$

Donc, dans ce cas, la boule est animée après le choc du seul mouvement de translation vertical dont la vitesse est

$$\gamma'_1 = -e\gamma_1.$$

Elle exécutera donc, sur place, un nombre infini de bonds verticaux dont la hauteur ira toujours en diminuant, celle du $n^{\text{ième}}$ bond étant d'après la formule (26)

$$\frac{\gamma_1^2 c^{2n}}{2g} = \frac{\gamma_1^2}{g}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}.$$

La boule reviendra définitivement au repos au bout du temps

$$-\frac{2e\gamma_1}{g(1-e)} = -\frac{2\gamma_1}{g}.$$

Si $v_1 - \frac{7}{2}\alpha_1 = \varepsilon$, ε étant très petit, les autres conditions restant les mêmes, on aura

$$v_1 = \frac{7}{2}\alpha_1 + \varepsilon = \alpha_1 - \rho q_1,$$

d'où

$$\rho q_1 = -\frac{5}{2}\alpha_1 - \varepsilon$$

et

$$\alpha'_1 = \frac{5}{7}\alpha_1 + \frac{2}{7}\rho q_1 = -\frac{2}{7}\varepsilon,$$

$$q'_1 = \frac{\alpha'}{\rho} = -\frac{2}{7}\frac{\varepsilon}{\rho}.$$

Donc, dans ce cas, le point C sera animé d'une très faible vitesse horizontale et la boule d'un mouvement de rotation dont la composante horizontale sera très lente.