Ét. Delassus

Sur l'équilibre paramétrique des systèmes matériels

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 533-539
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__533_1>

[R8a]

SUR L'ÉQUILIBRE PARAMÉTRIQUE DES SYSTÈMES MATÉRIELS;

PAR M. ÉT. DELASSUS.

1. Nous dirons qu'un système aux paramètres indépendants ou non $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et soumis à des forces données $\mathcal{F}$ est en *équilibre paramétrique* pour le système $q_1^0, q_2^0, \ldots, q_n^0$ si les équations du mouvement intégrées avec les conditions initiales

$$q_1 = q_1^0, \qquad q_2 = q_2^0, \qquad \ldots, \qquad q_n = q_n^0,$$
$$q_1'^0 = q_2'^0 = \ldots = q_n'^0 = 0$$

donnent pour les q des fonctions de t qui sont constantes.

Cette définition comprend, comme cas particuliers, l'équilibre absolu et l'équilibre relatif.

Pour exprimer qu'il y a équilibre paramétrique pour $q_1^0, q_2^0, \ldots, q_n^0$, il suffit, dans les équations du mouvement, de remplacer les q par les q^0, les q' et les q'' par zéro et d'écrire que les égalités ainsi obtenues sont vérifiées quelle que soit la variable t. Ces égalités

$$(1) \quad f_1(q_1^0, \ldots, q_n^0, t) = 0, \qquad \ldots, \qquad f_n(q_1^0, \ldots, q_n^0, t) = 0$$

sont en nombre égal ou inférieur à celui des paramètres. En écrivant que ce sont des identités en t, on arrive à des impossibilités ou à des décompositions et alors à un nombre d'équations supérieur à celui des inconnues q^0, de sorte que ce n'est que pour des problèmes choisis d'une façon particulière que l'équilibre paramétrique peut exister.

Si, au contraire, t ne figure pas explicitement dans les équations du mouvement, il ne figure pas dans les équations (1) et l'on a ainsi au plus n équations pour déterminer les n inconnues q^0, de sorte qu'il existe normalement des systèmes q^0 pour lesquels il y a équilibre paramétrique.

Considérons alors la classe très générale des problèmes de mouvement de systèmes holonomes possédant une fonction génératrice. Les équations du mouvement contiendront ou non explicitement le temps suivant que cette variable figurera ou ne figurera pas explicitement dans la fonction génératrice et, dans ce dernier cas, le problème admet l'intégrale des forces vives de M. Painlevé, telle que nous l'avons définie antérieurement; donc :

Les seuls problèmes holonomes et à fonction génératrice possédant normalement des équilibres paramétriques sont ceux qui possèdent l'intégrale des forces vives.

Nous supposerons donc, dans ce qui suivra, que le problème admet une fonction de forces (pouvant dépendre de t), c'est-à-dire des fonctions génératrices, et que, parmi celles-ci, il y en a qui soient indépendantes de t; nous désignerons par G l'une d'elles.

2. Soit $G_2 + G_1 + G_0$ la fonction G décomposée en groupes homogènes. De ce que t n'y figure pas, résulte immédiatement que si, dans les équations de Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial G}{\partial q'}\right) - \frac{\partial G}{\partial q} = 0,$$

on annule tous les q' et les q'', on obtient les équations

$$\frac{\partial G_0}{\partial q_1} = 0, \qquad \dots, \qquad \frac{\partial G_0}{\partial q_n} = 0,$$

c'est-à-dire les équations du maximum ou du minimum de G_0.

La démonstration classique du théorème de Dirichlet sur la stabilité de l'équilibre absolu repose sur les propriétés suivantes :

1° On a l'intégrale des forces vives

$$T = U + h;$$

2° T est une forme quadratique des q', homogène et positive;

3° L'équilibre est fourni par un système de valeurs des paramètres pour lequel la fonction U a un maximum isolé.

Dans le cas général de l'équilibre paramétrique, nous retrouvons l'intégrale des forces vives

$$G_2 = G_0 + h,$$

où G_2 et G_0 ont respectivement les mêmes propriétés que T et U, de sorte que la démonstration du théorème de Dirichlet et les conséquences immédiates que l'on en tire s'appliquent sans aucune modification. Ainsi :

L'équilibre paramétrique, fourni par un système de valeurs des paramètres, est certainement stable si ce système donne un maximum isolé de la fonction G_0.

3. On peut toujours supposer que cet équilibre stable soit fourni par les valeurs nulles des paramètres et donne, pour G_0, une valeur nulle.

Si l'on prend des conditions initiales q^0 et q'^0 infiniment petites, les q et les q' resteront infiniment petits pendant tout le mouvement ultérieur et l'on obtiendra les équations de ce mouvement en développant G et ne conservant que les termes du second ordre.

Il est à remarquer que G_2 et G_0 commencent par de tels termes, mais que G_1 commence par des termes du premier ordre; ces termes forment une fonction des q', linéaire et à coefficients constants, donc dérivée exacte d'une fonction des q; d'après la notion d'équivalence des forces vives, ils disparaissent d'eux-mêmes dans la formation des équations de Lagrange; on peut ne pas en tenir compte et considérer le développement de G_1 comme commençant seulement aux termes du second ordre.

Si l'on ne conserve alors, comme première approximation, que les termes infiniment petits du second ordre, G se réduit à une fonction

$$\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_1 + \Gamma_0,$$

Γ_2 étant une forme quadratique aux q', homogène, à coefficients constants et essentiellement positive, Γ_1 une forme bilinéaire aux q, q', homogène et à coefficients constants et Γ_2 une forme quadratique aux q, homogène à coefficients constants et essentiellement négative.

Au moyen de cette fonction génératrice réduite, les équations des petits mouvements deviennent

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Gamma_2}{\partial q'}\right) + \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Gamma_1}{\partial q'}\right) - \frac{\partial \Gamma_1}{\partial q}\right] - \frac{\partial \Gamma_0}{\partial q} = 0$$

et sont des équations linéaires et homogènes à coefficients constants.

4. Les équations précédentes des petits mouvements s'appliquent, même si les conditions de Dirichlet ne sont pas satisfaites, et leur étude permet de voir si l'équilibre paramétrique est stable ou instable. La discussion générale est impraticable; bornons-nous au cas d'un seul paramètre. On a alors

$$G = f(q)q'^2 + \varphi(q)q' + \psi(q)$$

et la portion

$$G_1 = \varphi(q)q'$$

étant une dérivée exacte est à supprimer, de sorte qu'on doit prendre seulement

$$G = f(q)q'^2 + \psi(q).$$

Les équilibres paramétriques seront donnés par

$$\psi'(q) = 0;$$

soit q_0 l'un d'eux, posons

$$q = q_0 + p,$$

on aura

$$G = f(q_0 + p)p'^2 + \psi(q_0 + p),$$

d'où

$$\Gamma = f(q_0)p'^2 + \frac{1}{2}\psi''(q_0)p^2$$

et l'équation de Lagrange des petits mouvements

$$f(q_0)p'' - \frac{1}{2}\psi''(q_0)p = 0$$

ou

$$p'' = \frac{\psi''(q_0)}{2f(q_0)}\,p.$$

Si $\frac{\psi''(q_0)}{2f(q_0)}$ est positif, l'intégration se fera par des exponentielles, p contiendra des termes croissant indéfiniment avec le temps et l'équilibre sera instable. Si cette quantité est nulle, p sera fonction linéaire du temps et l'on arrivera à la même conclusion.

Enfin, si elle est négative, p ne contiendra que des termes trigonométriques et l'équilibre sera stable.

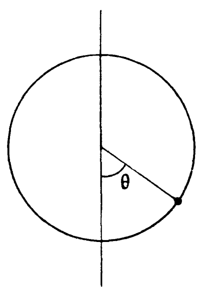
Remarquons que $f(q_0)$ étant forcément positif, la discussion précédente est déterminée par le signe de $\Psi''(q_0)$, de sorte que :

L'équilibre paramétrique est stable si $\psi''(q_0)$ est négatif et instable s'il est nul ou positif.

Et comme la condition

$$\psi''(q_0) < 0$$

est la condition d'un maximum de ψ, on voit qu'on



a ainsi, dans ce cas, la réciproque du théorème de Dirichlet.

Par exemple, pour le problème du régulateur de Watt, on a

$$G = mR^2\theta'^2 + mR^2\sin^2\theta\,\omega^2 + 2mgR\cos\theta,$$

donc l'équation d'équilibre paramétrique

$$\frac{\partial G_0}{\partial \theta} = 2mR^2 \sin\theta \cos\theta\, \omega^2 - 2mgR \sin\theta = 0$$

qui donne les solutions

$$\theta = 0, \qquad \theta = \pi, \qquad \cos\theta_1 = \frac{g}{R\omega^2},$$

la dernière n'étant réelle que si

$$\frac{g}{R\omega^2} < 1.$$

On a

$$\frac{\partial^2 G_0}{\partial \theta^2} = 4mR^2\omega^2 \cos^2\theta - 2mgR\cos\theta - 2mR^2\omega^2;$$

ce qui donne les signes suivants avec leurs conséquences

$g > R\omega^2$.

θ.	$\frac{\partial^2 G_0}{\partial \theta^2}$.	
0	$-$	éq. stable
π	$+$	éq. instable

$g < R\omega^2$.

θ.	$\frac{\partial^2 G_0}{\partial \theta^2}$.	
0	$+$	éq. instable
θ_1	$-$	éq. stable
π	$+$	éq. instable