Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1912)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 506-528
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__506_0>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1912).

Mathématiques élémentaires [1].

SOLUTION PAR UN ANONYME.

I.

1. Les relations

$$\alpha.\overline{AM} = \overline{AQ}, \quad \beta.\overline{BN} = \overline{BM}, \quad \gamma.\overline{CP} = \overline{CN}, \quad \delta.\overline{DQ} = \overline{DP},$$
$$\alpha = \mp 1, \quad \beta = \mp 1, \quad \ldots$$

donnent lieu aux remarques suivantes, qui nous seront utiles par la suite. Si (a), (b), (c), (d) sont les plans perpendiculaires aux plans des angles A, B, C, D, menés par les bissectrices de ces angles, et (a'), (b'), (c'), (d') les plans analogues menés par les bissectrices des angles extérieurs, le centre S de la sphère est

dans le plan (a)	pour	$\alpha = -1$,
dans le plan (a')	pour	$\alpha = +1$;

on doit remarquer que la bissectrice de l'angle A est la pseudo-bissectrice de l'angle des axes m, n, p, q définis dans l'énoncé.

On a

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AQ}} \times \frac{\overline{BN}}{\overline{BM}} \times \frac{\overline{CP}}{\overline{CN}} \times \frac{\overline{DQ}}{\overline{DP}} = \alpha\beta\gamma\delta = \pm 1,$$

et le produit $\alpha\beta\gamma\delta$ ne change pas de signe quand on change l'orientation de la droite m, par exemple : α et

[1] *Voir* l'énoncé p. 469 des *Nouvelles Annales* de 1912

β changent de signe. *On peut écrire*

$$\frac{\overline{\mathrm{MA}}}{\overline{\mathrm{MB}}} \times \frac{\overline{\mathrm{NB}}}{\overline{\mathrm{NC}}} \times \frac{\overline{\mathrm{PC}}}{\overline{\mathrm{PD}}} \times \frac{\overline{\mathrm{QD}}}{\overline{\mathrm{QA}}} = \alpha\beta\gamma\delta = \pm 1,$$

et deux cas se présentent ([1]).

a. Avec $\alpha\beta\gamma\delta = +1$, *les quatre points* M, N, P, Q *sont dans un même plan;* ils sont par suite sur un cercle. Si l'on écrit

$$\begin{aligned}
a &= \overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AM}} + \overline{\mathrm{MB}} = \overline{\mathrm{AM}} - \beta.\overline{\mathrm{BN}},\\
b &= \overline{\mathrm{BC}} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \overline{\mathrm{BN}} - \gamma.\overline{\mathrm{CP}},\\
c &= \overline{\mathrm{CD}} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \overline{\mathrm{CP}} - \delta.\overline{\mathrm{DQ}},\\
d &= \overline{\mathrm{DA}} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \overline{\mathrm{DQ}} - \alpha.\overline{\mathrm{AM}},
\end{aligned}$$

en combinant ces relations de manière à faire disparaître $\overline{\mathrm{BN}}$, $\overline{\mathrm{CP}}$, $\overline{\mathrm{DQ}}$, on obtient

$$a + \beta.b + \beta\gamma.c + \beta\gamma\delta.d = \overline{\mathrm{AM}}(1 - \alpha\beta\gamma\delta) = 0;$$

le contour ABCDA *n'est pas quelconque.*

Deux des termes devant être négatifs, on doit avoir

$$\beta \times \beta\gamma \times \beta\gamma\delta = +1,$$

donc

$$\beta\delta = +1, \qquad \alpha\gamma = +1,$$

les sommets A et C (auxquels se rapportent α et γ) étant toujours associés, ainsi que les sommets B et D, on peut avoir

$$\begin{matrix} \alpha = \gamma = -1, \\ \beta = \delta = -1, \end{matrix} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} \alpha = \gamma = -1, \\ \beta = \delta = +1, \end{matrix} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} \alpha = \gamma = +1, \\ \beta = \delta = -1, \end{matrix}$$

([1]) Le nombre des rapports $\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}, \frac{\mathrm{NB}}{\mathrm{NC}}, \ldots$ qui sont négatifs est de même gravité que le nombre des rapports $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AQ}}, \frac{\mathrm{BN}}{\mathrm{BM}}, \ldots$ qui sont négatifs; mais on ne doit pas perdre de vue que α, β, γ, δ sont les signes de ces derniers rapports et non les signes des rapports $\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}, \ldots$

ce qui donne les trois cas résumés par l'écriture

$$(a-b+c-d)(a+b-c-d)(a-b-c+d)=0;$$

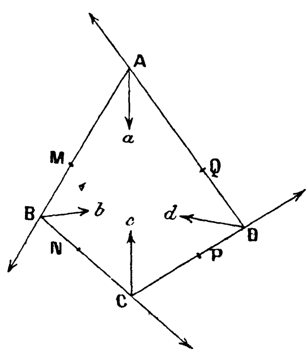
on peut écrire

$$a+c=b+d \quad \text{ou} \quad |a-c|=|d-b|;$$

cela forme seulement deux cas distincts.

Avec $a-b+c-d=0$, on a la figure 1 et des

Fig. 1.



figures analogues où interviennent les plans (a), (b), (c), (d).

Avec $a+b-c-d=0$, les côtés a et b ayant en commun le sommet B, les côtés c et d ayant en commun le sommet D, on a la figure 2 et des figures analogues où interviennent des plans (a), (b'), (c), (d'); on a, en effet

$$\beta=+1, \qquad \delta=+1.$$

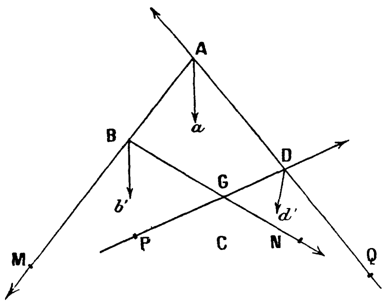
On peut remarquer que les plans a, b, c, d, ou a, b', c, d' perpendiculaires aux cordes QM, MN, NP, PQ du cercle MNPQ, ont une droite commune.

Si l'on veut, par la suite, avoir dans tous les cas

$$\overline{AB}-\overline{BC}+\overline{CD}-\overline{DA}=0,$$

ce qui exige $\alpha = \gamma = -1$, $\beta = \delta = -1$, il faudra conserver, pour le premier des trois cas précédents, les axes AB, BC, CD, DA; changer pour le second cas le

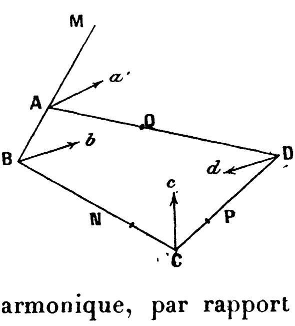
Fig. 2.



sens des axes n et p qui se croisent en C, changer pour le troisième cas le sens des axes p et q qui se croisent en D. En même temps, on pourrait désigner par a le plan perpendiculaire au plan de l'angle A mené par la pseudo-bissectrice de l'angle des axes qui se croisent en A, etc.; on mettrait b et d, au lieu de b' et d', dans la figure 2, où le sens d'un axe serait changé en B et en D (axes passant en C).

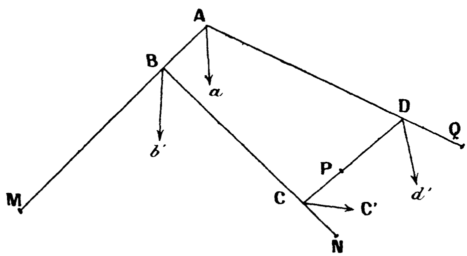
b. Avec $\alpha\beta\gamma\delta = -1$, le point Q, par exemple, est

Fig. 3.



le conjugué harmonique, par rapport aux points D et A, du point où la droite DA est rencontrée par le plan MNP; ou encore *les plans* MNP *et* MPQ *sont conjugués harmoniques par rapport aux plans*

Fig. 4.



(MP, AB) *et* (MP, CD). On a, par exemple, les figures 3 et 4, la première avec α seul positif (plan a'), la seconde avec α seul négatif (plan a).

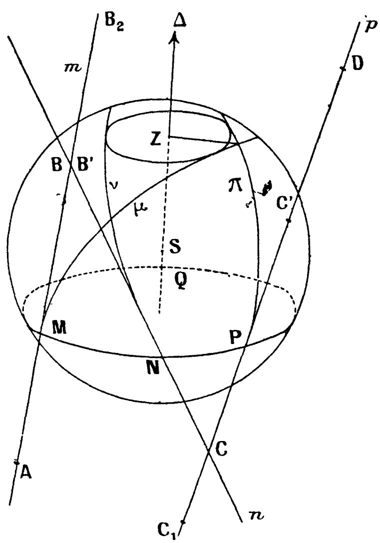
La suite montrera que les deux cas précédents se présentent effectivement.

II.

2. Supposons donnée la sphère (S). Soient m et p (*fig.* 5) deux droites fixes tangentes à cette sphère aux points M et P. Pour obtenir une droite n qui s'appuie sur les droites m et p et qui soit tangente à la sphère, prenons un point B sur la droite m, considérons le petit cercle qui est la section de la sphère par le plan (B, p), cercle non représenté sur la figure, et menons du point B des tangentes à ce cercle : nous obtenons deux droites n et n' répondant à la question.

Soit BNC une de ces droites; si l'on reporte la division de points C, N, B sur la droite p en C, P, E, on a PE $=$ NB $=$ MB, et le point C est à l'intersection de la droite p avec le plan perpendiculaire à la droite BE en son milieu. La droite m étant orientée dans un sens bien déterminée, si l'on oriente la droite p dans un certain sens, et si l'on prend $\overline{PE} = \overline{MB}$, le plan perpendiculaire à la droite BE en son milieu fait correspondre au point B un point unique C; si l'on oriente la droite p

Fig. 5.



dans le sens contraire au sens adopté d'abord, en prenant $\overline{PE'} = \overline{MB}$, on fera correspondre au point B un point unique C'; la correspondance entre les points B et C sur les droites m et p, correspondance doublement quadratique au premier abord, se décompose en deux correspondances homographiques (B, C) et (B', C'), *les droites n forment deux systèmes* (n) et (n'). Cela tient à ce que les directrices m et p sont tangentes à la sphère (S).

Soit BNC une position de la droite n; le plan MPN, déterminé par la droite fixe MP et le point variable N, est également incliné sur les droites m et n, sur les droites n et p, donc sur les droites m et p qui sont données. Réciproquement, si N est un point de la sphère tel que le plan MNP soit également incliné sur les droites m et p, le plan tangent en N rencontre ces droites en des points B et C qui sont alignés avec le point N : la droite BC est tangente à la sphère, au point N. Or, il passe par MP deux plans, et deux seulement, qui sont également inclinés sur les droites m et p : ces plans passent par l'une ou l'autre des bissectrices des angles que forme, par exemple, la droite m avec la parallèle à la droite p menée par le point M; *le lieu des points* N *et* N′ *se compose donc de deux cercles* (Γ) *et* (Γ′) *passant en* M et P. (On arrive au même résultat, d'une manière moins simple, en projetant la division de points B, N, C parallèlement à MP sur le plan mené par la droite m parallèlement à la droite p.) Quand on se donne le point B, ainsi qu'on a fait au début de ce numéro, comme le cercle déterminé sur la sphère par le plan (B, p) rencontre chacun des deux cercles (Γ) et (Γ′) en un seul point, N ou N′, distinct du point P, le point N par exemple est sur le cercle (Γ), le point N′ est sur le cercle (Γ′).

La droite n est dans le plan tangent en N à la sphère, et fait avec le plan du cercle (Γ) un angle égal à celui que fait la droite fixe m avec ce même plan; de là cette conséquence : *Le lieu des droites n qui correspondent aux points* N *du cercle* (Γ) *est la surface de révolution* (Σ) *engendrée par la rotation de l'une des droites n autour de l'axe* (Δ) *du cercle* (Γ); *cette surface contient les droites m et p. Le lieu des droites n' qui correspondent aux points N′ du cercle* (Γ′) *est de même la surface de révolution* (Σ′)...; avec la disposition de la figure 5, le cercle (Γ′) est à peu près de front, l'axe (Δ′) est à peu près de bout.

La droite Δ est l'axe de la rotation qui amène la demi-droite Mm sur la demi-droite Pp, en amenant le point M au point P; la droite Δ' est de même l'axe de la rotation qui amène la demi-droite Mm sur la demi-droite opposée à la demi-droite Pp, en amenant le point M au point P. Deux tels axes existent *a priori* : pour obtenir le premier, on porte sur les demi-droites Mm et Pp deux vecteurs égaux MB et PE, et l'on prend l'intersection des deux plans perpendiculaires aux droites MP et BE en leurs milieux; on obtient le second d'une manière analogue en remplaçant le segment PE par le segment opposé PE'. Si l'on veut utiliser le point S, comme chacune des droites Δ, Δ' doit faire le même angle avec les deux droites m et p, on mènera par ce point S des parallèles aux droites m et p, on fera passer par les bissectrices des angles obtenus des plans perpendiculaires au plan des deux parallèles, et l'on coupera ces deux plans par le plan qui est perpendiculaire à la corde MP en son milieu (¹); on aura ainsi les axes (Δ) et (Δ').

Le point M est à la fois un point N et un point N'; la droite n_1, qui joint le point M au point d'intersection C_1 de la droite p avec le plan tangent en M à la sphère, est à la fois une droite n et une droite n'. Le point P est de même un point N et un point N'; la droite n_2, qui joint le point P au point d'intersection B_2 de la droite m avec le plan tangent en P, est à la fois une droite n et une droite n'. *Les deux surfaces* (Σ) *et* (Σ') *ont en commun les quatre droites* m, p, n_1, n_2.

(¹) Les axes (Δ) et (Δ') sont, sur le paraboloïde hyperbolique équilatère qui est le lieu des points équidistants des droites m et p, les deux génératrices perpendiculaires à la corde MP; les plans directeurs de ce paraboloïde, si on les mène par le point S, sont les deux plans dont on vient de parler.

La corde MN du cercle (Γ) faisant constamment des angles égaux avec les droites m et n, la tangente en M à ce cercle est bissectrice de l'un des angles que forment les droites m et n_1; *les tangentes en* M *et* P *aux deux cercles* (Γ) *et* (Γ') *sont les bissectrices des angles que forment les droites* m et n_1, *les droites* n_2 et p, *droites qu'on peut regarder comme les traces des deux plans* (MP, m) *et* (MP, p) *sur les plans tangents* M et P *à la sphère. Les deux cercles* (Γ) *et* (Γ') *sont orthogonaux.* [Si l'on projette la division de points B, N, C, parallèlement à MP, sur le plan (m, n_1) qui est le plan tangent en M à la sphère, en menant CC'' parallèle à PM jusqu'à MC_1 et NN'' parallèle à PM jusqu'à BC'', on voit directement que la droite MN'', qui est la tangente en M au cercle MNP, est bissectrice de l'un des angles que forment les droites m et n_1; on a ainsi une nouvelle solution du problème proposé.]

3. Les deux plans (m, n) et (p, n) déterminent sur la sphère *deux petits cercles variables, tangents en* M *à un grand cercle* μ, *tangents en* P *à un grand cercle* π, *tangents entre eux au point* N; soit ν le grand cercle variable qui leur est tangent en N. On voit sur la figure (en imaginant le grand cercle qui est sur la sphère le lieu des points équidistants de M et de P), comment on peut obtenir l'enveloppe du grand cercle ν, et le lieu du point N. Les axes (Δ) et (Δ') se présentent ici comme les intersections par le plan perpendiculaire à la corde MP, en son milieu, des plans bissecteurs des dièdres que forment les plans (S, m) et (S, p).

Dans le même ordre d'idées, *un point* N *est le point de contact d'une sphère de centre* B, *tangente en* M *à un plan fixe* U *perpendiculaire à la droite* m *au point* M, *et d'une sphère de centre* C, *tangente en* P *à un plan fixe* W *perpendiculaire à la droite* p *au point* P. On peut obtenir le lieu du point N en cherchant d'abord l'enveloppe du plan V qui est tangent en N aux deux sphères considérées. Les axes (Δ) et (Δ') se présentent ici comme les intersections par le plan perpendiculaire à la corde MP, en son milieu, des plans bissecteurs des dièdres que forment les plans U et W.

On pourrait, d'ailleurs, employer une inversion de pôle M pour traiter l'un ou l'autre des deux problèmes dont on vient de parler.

4. Si l'on prend deux droites AD et BC du système (n), on a un contour quadrangulaire ABCDA circonscrit à la sphère, les points de contact M, N, P, Q étant dans un même plan; il en est de même si l'on prend deux droites A'D' et B'C' du système (n'). Le contour est alors tracé sur un hyperboloïde de révolution. Si, à partir du cercle de gorge, on oriente m et p dans un certain sens, n et q dans le sens contraire, il suffit de projeter le contour sur l'axe de l'hyperboloïde pour obtenir la relation

$$\overline{AB} - \overline{BC} + \overline{CD} - \overline{DA} = 0;$$

inversement, on pouvait traduire cette relation, obtenue au paragraphe I, en disant que, *si* $\overline{m}$, $\overline{n}$, $\overline{p}$, $\overline{q}$ *sont les semi-droites qui y donnent lieu, les semi-droites déduites de celles-là, en changeant le sens de la seconde et le sens de la quatrième, sont parallèles à quatre semi-génératrices d'un semi-cône de révolution.*

Si l'on prend une droite AD du système (n) et une droite B'C' du système (n'), on a un contour AB'C'DA, pour lequel les points de contact M, N′, P, Q ne sont pas dans un même plan; les plans MPN′ et MPQ forment d'ailleurs un faisceau harmonique avec les plans MP, AB′ et MP, C′D, soit parce que ces plans passent par l'une ou l'autre des bissectrices des angles que forme la droite m avec la parallèle à la droite p menée par le point M, soit parce que les traces des quatre plans sur le plan tangent en M à la sphère sont le système formé par deux droites m, n_1 et les bissectrices de leurs angles.

Inversement, les faits établis au paragraphe I auraient permis d'établir que le lieu des points N et N′ se compose de deux cercles : on aurait considéré une droite fixe AQD, tangente à la sphère au point Q, et les tangentes mobiles BNC, BN′C′; mais ce n'est pas là, évidemment, ce que demandait l'énoncé.

III.

5. Supposons maintenant donné le contour ABCDA, et cherchons les sphères (S) tangentes aux quatre côtés. *Si l'on veut d'abord une telle sphère avec points de contact dans un même plan, le contour doit vérifier une relation de la forme*

$$a + \beta . b + \beta\gamma . c + \beta\gamma\delta . d = 0;$$

ou encore les quatre droites m, n, p, q doivent être parallèles à quatre génératrices d'un cône de révolution, ce qui donne le moyen de réaliser le contour. Or, d'après ce qui précède, le système formé par un contour quadrangulaire et une sphère tangente aux quatre côtés, même pour le cas où les points de contact doivent être dans un même plan, dépend de 12 paramètres, à savoir : 4 paramètres pour la sphère, 6 paramètres pour les deux droites m et p, 2 paramètres pour les droites n et q. Comme le contour ABCDA ne dépend ici que de 11 paramètres, la sphère (S) doit dépendre d'un paramètre ([1]). Ce raisonnement suppose d'ailleurs que la propriété indiquée est la seule que possède un contour quadrangulaire circonscrit à une sphère, avec points de contact dans un même plan; on verra qu'il en est bien ainsi.

Prenons le point M à volonté sur la droite m (*fig.* 1 ou 2), et déterminons les points N, P, Q par les relations nécessaires

$$\beta.\overline{BN} = \overline{BM}, \qquad \gamma.\overline{CP} = \overline{CN}, \qquad \delta.\overline{DQ} = \overline{DP},$$

les valeurs de β, γ, δ *étant celles qui figurent dans la relation*

$$\overline{AB} + \beta.\overline{BC} + \beta\gamma.\overline{CD} + \beta\gamma\delta.\overline{DA} = 0$$

vérifiée par le contour; un calcul inverse de celui du paragraphe I donne

$$\alpha.\overline{AM} = \overline{AQ},$$

avec $\alpha\beta\gamma\delta = 1$. Les points M, N, P, Q sont dans un même plan Π.

Il faut montrer que ces points appartiennent à un cercle. On a vu comment, par une orientation conve-

---

([1]) Quand on crée un contour quadrangulaire circonscriptible à une sphère, avec points de contact dans un même plan, en partant de la sphère (*fig.* 5), il semble au premier abord que ce contour dépend de 12 paramètres, dont 4 pour la sphère; mais il se trouve que le même contour peut être obtenu à partir d'une infinité de sphères, de sorte que la sphère fournit seulement 3 paramètres pour le contour.

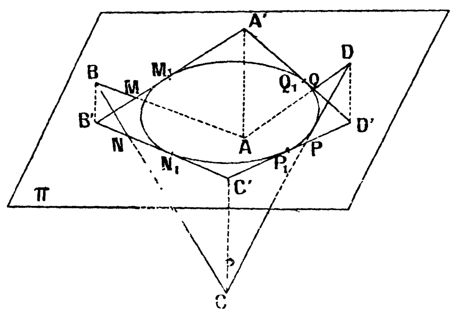
J'observe en passant que les notions de paramètre et de condition devraient être introduites dans l'enseignement tout au début de l'étude de la Géométrie, à propos du parallélogramme par exemple.

nable des droites m, n, p, q, on peut avoir

$$\overline{AM} = -\overline{AQ}, \qquad \overline{BN} = -\overline{BM}, \qquad \ldots,$$
$$\overline{AB} - \overline{BC} + \overline{CD} - \overline{DA} = 0;$$

supposons les droites ainsi orientées. Projetons la figure sur le plan Π (*fig.* 6), et soient A′, B′, C′, D′ les

Fig. 6.



projections des points A, B, C, D; prenons comme axes m', n', ..., les projections des axes m, n, ... Les droites AB, BC, ... étant également inclinées sur le plan MNPQ, on a

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \times k, \qquad \overline{B'C'} = \overline{BC} \times k, \qquad \ldots,$$

et la relation ci-dessus donne

$$\overline{A'B'} - \overline{B'C'} + \overline{C'D'} - \overline{D'A'} = 0;$$

il en résulte, comme on sait, que les axes m', n', ..., sont tangents à un cycle, en des points M_1, N_1, P_1, Q_1. On a d'ailleurs

$$\overline{B'M} = -\overline{B'N} \qquad \text{et aussi} \qquad \overline{B'M_1} = -\overline{B'N_1},$$

$B'M_1$ et $B'N_1$ étant deux tangentes menées d'un point à un cycle; on en déduit la première des relations

$$\overline{M_1M} = -\overline{N_1N} = \overline{P_1P} = -\overline{Q_1Q};$$

les points M, N, P, Q *appartiennent à un cercle concentrique au cercle* $M_1 N_1 P_1 Q_1$.

Considérons alors la sphère qui passe par le cercle MNPQ et qui est tangente en M à la droite AB (le contour ABCD étant supposé gauche); cette sphère est tangente en N à la droite BC puisque l'on a $BN = BM, \ldots$; elle est bien tangente aux quatre côtés du contour.

Observons maintenant que les plans Π sont parallèles entre eux : en effet, le rapport $\dfrac{\overline{BM}}{\overline{BN}}$ étant constant, les droites MN sont parallèles entre elles, et il en est de même des droites NP, ... Imaginons que l'on projette la figure sur un plan fixe (π) parallèle à la direction des plans (Π), la projection du point A étant désignée par a, celle du point M par m, celle du point M_1 par m_0 (on en verra plus loin la raison); soit Δ la perpendiculaire au plan (π) menée par le centre ω du cycle tangent aux quatre axes qui portent les côtés ab, bc, ... Les cercles MNPQ ayant leurs centres sur la droite Δ, cette droite est le lieu des centres des sphères (S); c'est la droite commune aux quatre plans a, b, c, d de la figure 1, ou aux quatre plans a, b', c, d' de la figure 2. Celle des sphères (S) qui a le plus petit rayon s'obtient en mettant les points m, n, p, q en m_0, n_0, p_0, q_0; les points M, N, P, Q occupent alors certaines positions M_0, N_0, P_0, Q_0.

6. Si l'on imagine, pour plus de clarté, que l'on a pris comme plan (π) le plan (Π_0) qui contient les points M_0, N_0, P_0, Q_0, on voit que le contour quadrangulaire ABCDA, avec l'hypothèse

$$a + \beta . b + \beta\gamma . c + \beta\gamma . d = 0,$$

relative au système d'axes AB, BC, ..., appartient à une surface (Σ) engendrée par une droite tournant autour d'un axe Δ (*cf.* ci-dessus). Cette surface est le lieu des cercles MNPQ, l'enveloppe des sphères (S). Réciproquement, si l'on considère un contour quadrangulaire ABCDA tracé sur une surface (Σ), en orientant les génératrices de manière que leurs projections sur le plan (Π_0) du cercle de gorge soient tangentes à un cycle porté par ce cercle de gorge, on a en projection

$$\overline{ab} - \overline{bc} + \overline{cd} - \overline{da} = 0,$$

et, par suite,

$$\overline{AB} - \overline{BC} + \overline{CD} - \overline{DA} = 0;$$

on aurait encore cette relation en projetant sur l'axe de révolution de la surface (Σ). Il existe une série continue de sphères tangentes aux quatre côtés du contour, avec points de contact dans un même plan; ce sont les sphères qui sont tangentes à la surface (Σ) le long d'une parallèle. *Cette réciproque est intuitive.*

Une surface (Σ), définie à partir d'un contour quadrangulaire qui doit vérifier la relation ci-dessus, dépend de $11 - 4$ ou 7 paramètres, puisque chacune des quatre droites m, n, p, q a un degré de liberté. Comme toute surface (Σ) peut être obtenue ainsi, une telle surface dépend de 7 paramètres; et, en effet, une surface (Σ) est définie par son axe (4 paramètres) et par une génératrice ayant un degré de liberté (3 paramètres).

7. Dans ce qui précède, on s'est un peu écarté de l'énoncé dont la rédaction laisse ici à désirer. Si l'on voulait supposer l'existence d'une sphère tangente aux quatre côtés du contour, avec points de contact dans un même plan, sous la condition nécessaire

$a + \beta b + \ldots = 0$, on saurait, d'après la seconde partie, que le contour est tracé sur un hyperboloïde de révolution, et les sphères inscrites à cet hyperboloïde seraient des solutions du problème; cela ne prouverait pas, d'ailleurs, qu'il n'y en ait pas d'autres. Sans recourir à la seconde partie, on saurait que les quatre plans a ou a', b ou b', ... qui sont perpendiculaires aux cordes QM, MN, NP, PQ du cercle MNPQ ont une droite commune (Δ), et l'on pourrait utiliser ce fait pour résoudre la question posée. On doit en réalité, comme nous l'avons fait, supposer simplement que le contour satisfait à la condition nécessaire $a + \beta b + \ldots = 0$, et chercher *à partir de là* les sphères demandées.

8. *Proposons-nous maintenant d'obtenir une sphère* (S) *avec points de contact non situés dans un même plan, le contour* ABCD *étant d'ailleurs quelconque*. Si l'on pose

$$\overline{AM} = x, \qquad \overline{BN} = y, \qquad \overline{CP} = z, \qquad \overline{DQ} = t,$$

en orientant les droites m, n, p, q de A vers B, de B vers C, ..., les conditions nécessaires α. $\overline{AM} = \overline{AQ}$, ..., se traduisent, quel que soit le cas envisagé, par les relations

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha x = t - d, \\ \beta y = x - a, \\ \gamma z = y - b, \\ \delta t = z - c; \end{cases}$$

on en déduit, en posant $\alpha\beta\gamma\delta = \varepsilon$,

$$(2) \qquad \begin{cases} (1-\varepsilon)x = a + \beta.b + \beta\gamma.c + \beta\gamma\delta.d, \\ (1-\varepsilon)y = b + \gamma.c + \gamma\delta.d + \gamma\delta\alpha.a, \\ (1-\varepsilon)z = c + \delta.d + \delta\alpha.a + \delta\alpha\beta.b, \\ (1-\varepsilon)t = d + \alpha.a + \alpha\beta.b + \alpha\beta\gamma.c; \end{cases}$$

mais, pour former un système équivalent au système (1), nous écrirons, par exemple

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} (1-\alpha\beta\gamma\delta)x &= a+\beta.b+\beta\gamma.c+\beta\gamma\delta.d,\\ \beta.\overline{\mathrm{BN}} &= \overline{\mathrm{BM}},\\ \gamma.\overline{\mathrm{CP}} &= \overline{\mathrm{CN}},\\ \delta.\overline{\mathrm{DQ}} &= \overline{\mathrm{DP}}.\end{aligned}\right.$$

L'hypothèse $\alpha\beta\gamma\delta = 1$ (points M, N, P, Q dans un même plan) exige que le contour vérifie une relation de la forme

$$a+\beta.b+\beta\gamma.c+\beta\gamma\delta.d = 0.$$

et correspond aux sphères étudiées précédemment pour un tel contour : les conditions (3), conditions nécessaires, se réduisent alors aux trois dernières; nous devons laisser de côté cette hypothèse, et prendre ici

$$\alpha\beta\gamma\delta = -1.$$

Pour chaque système de valeurs de α, β, γ, δ vérifiant cette relation (il y en a huit), les formules (3) fournissent quatre points M, N, P, Q non situés dans un même plan. Ces quatre points déterminent une sphère, et *je dis que cette sphère est bien tangente aux quatre droites qui portent les côtés du contour;* en effet, si l'on désigne par M', N', P', Q' les points où elle coupe encore ces droites, on a

$$\begin{aligned} xx' &= (t-d)(t'-d), & & & \alpha x' &= t'-d,\\ yy' &= (x-a)(x'-a), & &\text{d'où} & \beta y' &= x'-a,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, & & & &\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

de sorte que x', y', z', t' sont égaux à x, y, z, t.

D'après la relation $\alpha\beta\gamma\delta = -1$, à chaque système de valeurs des quantités α, β, γ, δ correspond le système de valeurs obtenu en changeant tous les signes; on peut ainsi classer les huit solutions en quatre groupes de deux solutions :

α seul positif,	solution (1),
α seul négatif,	solution (1'),

et l'on a de même les solutions (2) et (2'), ... Les figures 3 et 4 représentent une solution (1) et une solution (1'), avec indication des plans (a', b, c, d) ou (a, b', c', d') qui déterminent le centre de la sphère.

9. Examinons ce que deviennent ces solutions isolées lorsque le contour vérifie une relation de la forme

$$a + \beta' b + \beta'\gamma'.c + \beta'\gamma'\delta'.d = 0,$$

soit α' défini pour l'égalité

$$\alpha'\beta'\gamma'\delta' = +1.$$

Dans la série continue de solutions qui correspond aux valeurs $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ ..., se trouve une sphère tangente en A au plan de l'angle A; on a alors $x = 0$, $t = d$, ... Ces valeurs satisfont au système (1) pour $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $\delta = \delta'$, $\alpha = \pm\alpha'$ indifféremment; en prenant $\alpha = -\alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $\delta = \delta'$, on aura donc une solution isolée, avec $x = 0$, $t = d$, ..., c'est-à-dire une sphère tangente en A au plan de l'angle A. On aura de même, parmi les solutions isolées, une sphère tangente B au plan de l'angle B, ... Les quatre autres solutions isolées ne présentent rien de remarquable, et sont d'ailleurs en dehors de la série continue de solutions.

Examinons d'un peu près les trois cas signalés au n° 1

$$\alpha' = \gamma' = -1, \qquad \alpha' = \gamma' = -1, \qquad \alpha' = \gamma' = +1,$$
$$\beta' = \delta' = -1, \qquad \beta' = \delta' = +1, \qquad \beta' = \delta' = -1.$$

Avec

$$a - b + c - d = 0,$$

qui correspond à

$$\alpha' = -1, \quad \beta' = -1, \quad \gamma' = -1, \quad \delta' = -1:$$

les solutions dont on vient de parler s'obtiennent, comme solutions isolées, en donnant à α, β, γ, δ les valeurs

(1)	$1,$	$-1,$	$-1,$	$-1,$
(2)	$-1,$	$1,$	$-1,$	$-1,$
	.....,	..,	.....,	...;

ce sont les solutions (1, 2, 3, 4). *On obtient les centres des sphères considérées ici en coupant la droite* Δ, *intersection commune des plans* a, b, c, d (*fig.* 1), *par les plans* a', b', c', d'. Pour la solution (1), les points M et Q des figures 1 et 3 sont confondus en A.

Avec

$$a + b - c - d = 0,$$

qui correspond à

$$\alpha' = -1, \quad \beta' = 1, \quad \gamma' = -1, \quad \delta' = 1,$$

les solutions en question s'obtiennent, comme solutions isolées, en donnant à α, β, γ, δ les valeurs

(3′)	$1,$	$1,$	$-1,$	$1,$
(4)	$-1,$	$-1.$	$-1,$	$1,$
(1′)	$-1,$	$1,$	$1,$	$1,$
(2)	$-1,$	$1,$	$-1,$	$-1;$

ce sont les solutions (3′, 4, 1′, 2). *On obtient les centres des sphères considérées ici en coupant la droite* Δ, *intersection commune des plans* a, b', c, d' (*fig.* 2) *par les plans* a', b, c', d. Pour la solution (1′), les points N et P des figures 2 et 4 sont confondus en C.

Avec

$$a - b - c + d = 0,$$

on aurait les solutions (3, 4', 1, 2'). Pour la solution (1), les points N et P de la figure 3 seraient confondus en C.

10. α. On peut avoir à la fois

$$a - b + c - d = 0,$$
$$a + b - c - d = 0;$$

on doit avoir pour cela

$$a = d, \qquad b = c.$$

Le plan bissecteur a du dièdre que forment les demi-plans ACB et ACD est un plan de symétrie pour le contour; les deux plans b et b' (*fig.* 1 et 2) coupent ce plan a suivant deux droites Δ_1 et Δ_2 dont chacune est un lieu de centre de sphères tangentes aux quatre côtés du contour, avec points de contact dans un même plan; ces deux droites ont un point commun O.

Que deviennent les huit sphères qui sont les solutions isolées du cas général? Les plans (a, c, b, d, b', d') ayant en commun le point O (*fig.* 1 et 2), deux de ces sphères se confondent avec la sphère de centre O, commune aux deux systèmes continus de solutions, et qui est tangente en B aux droites BA et BC, en D aux droites DA et DC; deux autres ont leurs centres aux points d'intersection de la droite Δ_1 ou (a, c, b, d) par les plans a' et c', et sont tangentes en A aux droites AB et AD, ou en C aux droites CB et CD; deux autres ont de même leurs centres aux points d'intersection de la droite Δ_2 ou (a, c, b', d') par les plans a' et c', et sont encore tangentes en A aux droites AB et AD, ou en C aux droites CB et CD; les deux dernières, qui sont vraiment des solutions isolées, ont leurs centres aux deux points (d, b', a', c') et (b, d', a', c') : l'une correspond aux valeurs $\overline{AM} = \overline{AQ} = b$, $\overline{CN} = \overline{CP} = -a$, et l'autre aux valeurs opposées.

β. On peut de même avoir à la fois

$$a + b - c - d = 0,$$
$$a - b - c + d = 0;$$

on doit avoir pour cela

$$a = c, \qquad b = d,$$

les côtés opposés étant égaux deux à deux. Les quatre plans a, b', c, d' (*fig.* 2) se coupent suivant une droite Δ_2, les quatre plans a', b, c', d se coupent suivant une droite Δ_3, et chacune de ces deux droites est un lieu de centres de sphères tangentes aux quatre côtés du contour, avec points de contact dans un même plan.

Des huit sphères qui sont les solutions isolées du cas général, quatre ont leurs centres aux points d'intersection de la droite Δ_2 par les plans qui déterminent la droite Δ_3, et sont respectivement tangents en A aux droites AD et AB, en B aux droites BA et BC, ...; les quatre autres ont de même leurs centres aux points d'intersection de la droite Δ_3 avec les plans qui déterminent la droite Δ_2, etc.

γ. Enfin, on peut avoir à la fois

$$a - b + c - d = 0,$$
$$a + b - c - d = 0,$$
$$a - b - c + d = 0;$$

on doit avoir pour cela

$$a = b = c = d.$$

Chacune des trois droites (a, b), (a, b', d'), (b, a', c'), ou Δ_1, Δ_2, Δ_3, est un lieu de centres de sphères tangentes au quatre côtés du contour, avec points de contact dans un même plan; les deux dernières de ces droites rencontrent la première en deux points O et Ω. Des huit sphères qui sont les solutions isolées du cas général, deux se confondent avec la sphère de centre O qui est tangente en B aux droites BA et BC, en D aux droites DA et DC; deux autres se confondent de même avec la sphère de centre Ω qui est tangente en A aux droites AB et AD, en C aux droites CB et CD; deux ont leurs centres sur la droite (a, b', d') ou $(c, b'\ d')$, droite Δ_2, aux points où elle est coupée par les plans a' et c', et sont tangentes en A ou en C au plan de l'angle A ou de l'angle C; deux ont de même leurs centres sur la droite (b, a', c') ou (d, a', c'), droite Δ_3, ...

11. Relativement à l'hypothèse $\alpha\beta\gamma\delta = 1$, pour laquelle il y a impossibilité ou indétermination, *la notion de correspondance donne naturellement la meilleure compréhension des choses par l'introduction d'un invariant;* et cette même notion présente d'une manière intéressante la solution qui correspond à un système de valeurs de α, β, γ, δ vérifiant la relation $\alpha\beta\gamma\delta = -1$.

Le contour ABCDA étant quelconque, prenons arbitrairement un point M sur la droite m, et déterminons sur les droites n, p, q, m les points N, P, Q, M_1, par les conditions

$$\beta.\overline{BN} = \overline{BM}, \quad \gamma.\overline{CP} = \overline{CN}, \quad \delta.\overline{DQ} = \overline{DP}, \quad \alpha.\overline{AM_1} = \overline{AQ}.$$

L'ensemble des points M est symétrique de l'ensemble des points N par rapport au plan b si $\beta = -1$, par rapport au plan b' si $\beta = +1$; l'ensemble des points N est de même symétrique de l'ensemble des points P, et ainsi de suite; dès lors *la division formée par les points* M_1 *est égale à la division formée par les points* M.

Pour $\beta = -1$, les divisions (M) et (N) sont de sens contraire sur les axes m et n; de là deux cas :

a. Avec $\alpha\beta\gamma\delta = +1$, *les deux divisions* (M) *et* (M_1) *sont de même sens sur l'axe* m; elles sont généralement distinctes, et le point M_1 ne peut se confondre avec le point M; si les deux divisions sont confondues, on a pour tout point M

$$\beta.\overline{BN} = \overline{BM}, \qquad \ldots, \qquad \alpha.\overline{AM} = \overline{AQ},$$

et l'on achève comme précédemment;

b. Avec $\alpha\beta\gamma\delta = -1$, les deux divisions (M) et (M_1) sont de sens contraires sur l'axe m, les points M et M_1 sont symétriques l'un de l'autre par rapport à un certain point de la droite m, et l'on doit mettre M en ce point; on achève comme précédemment.

12. Pour préciser ce qui précède, observons que les égalités

$$\begin{aligned} a &= \overline{AM} - \beta.\overline{BN}, \\ b &= \overline{BN} - \gamma.\overline{CP}, \\ c &= \overline{CP} - \delta.\overline{DQ}, \\ d &= \overline{DQ} - \alpha\,\overline{AM_1} \end{aligned}$$

donnent

$$a + \beta.b + \beta\gamma.c + \beta\gamma\delta.d = \overline{AM} - \alpha\beta\gamma\delta.\overline{AM_1}.$$

a. Avec $\alpha\beta\gamma\delta = 1$, on a

$$\overline{M_1M} = a + \beta.b + \beta\gamma.c + \beta\gamma\delta.d,$$

d'où la condition

$$a + \beta b + \ldots = 0.$$

b. Avec $\alpha\beta\gamma\delta = -1$, on a pour l'abscisse du milieu du segment MM_1

$$\frac{\overline{AM} - \overline{AM_1}}{2} = \frac{a + \beta b + \ldots}{2}.$$