Nouvelles annales de mathématiques

Maurice Fouché

Sur les systèmes de surfaces triplement orthogonales composés de cyclides

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 49-80

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__49_0>

[O¹6p]

SUR LES SYSTÈMES DE SURFACES TRIPLEMENT ORTHOGONALES COMPOSÉS DE CYCLIDES.

Par M. Maurice FOUCHÉ,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

1. *Introduction.* — Vers la fin de 1908, M. Darboux a publié dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* plusieurs Notes relatives à l'étude des systèmes de surfaces triplement orthogonales qu'il appelle *réversibles*. Ce sont ceux pour lesquels le mouvement relatif du trièdre des axes de coordonnées par rapport au trièdre des trois normales engendre un nouveau système orthogonal dont les axes ainsi déplacés sont les trois normales. Les surfaces qui constituent ce système sont des cyclides de Dupin.

Je me suis proposé d'étudier la même question par les procédés de la géométrie pure, et je suis parvenu à retrouver par ce moyen, et sans aucun calcul, un grand nombre des résultats obtenus par M. Darboux. J'ai fait la discussion des différentes formes que peut affecter le système réversible et j'ai démontré que tous les systèmes orthogonaux composés exclusivement de cyclides dérivent par inversion d'un système réversible. J'ai ajouté quelques remarques sur ces systèmes.

J'emploie la méthode Darboux-Combescure qui consiste, comme on le sait, à partager le problème en deux parties. On étudie d'abord le mouvement à trois paramètres, autour d'un sommet fixe, d'un trièdre trirectangle dont les arêtes sont parallèles aux normales aux trois surfaces et ensuite on cherche à déterminer la translation de ce trièdre de manière que, dans la variation de chacun des trois paramètres, le sommet engendre une des surfaces du système.

2. *Les lignes de courbure d'un système réversible sont planes.* — Soit $Oxyz$ le trièdre mobile dont les arêtes Ox, Oy, Oz sont respectivement parallèles aux normales aux surfaces obtenues en laissant constant l'un des paramètres ρ, ρ_1, ρ_2, et OXYZ le trièdre fixe formé par les trois axes de coordonnées. Le déplacement de $Oxyz$ dépend de neuf rotations dont chacune est la composante, suivant l'une des arêtes du trièdre mobile, de la rotation de ce trièdre déterminée par la variation d'un seul des paramètres ρ, ρ_1, ρ_2. On connaît les conditions nécessaires et suffisantes pour que le déplacement du trièdre appartienne à un système triple orthogonal. Elles sont au nombre de trois. Il faut et il suffit que trois rotations soient nulles, savoir la rotation autour de Ox quand ρ varie seule, la rotation autour de Oy quand ρ_1 varie seule et la rotation autour de Oz quand ρ_2 varie seule. La première de ces conditions exprime que quand ρ varie seule, le trièdre mobile $Oxyz$ tourne autour d'un axe situé dans le plan Oyz. Le mouvement du trièdre mobile est donc défini par le roulement du plan Oyz sur un cône fixe.

Le mouvement inverse, c'est-à-dire le mouvement relatif du trièdre des axes de coordonnées OXYZ par rapport au trièdre $Oxyz$, sera donc défini par le roulement de ce cône devenu mobile sur le plan Oyz rendu fixe. Mais, pour que ce mouvement inverse engendrât un nouveau système orthogonal, il faudrait que le cône se réduisît à un plan, ce qui est impossible. Il ne peut se réduire qu'à une droite, et alors l'axe de rotation est un axe permanent situé dans le plan Oyz. Donc pour que le système soit réversible, il faut et il suffit que quand ρ varie seule, la rotation du trièdre se fasse autour d'un axe permanent situé à la fois dans le plan Oyz et dans le plan OYZ et que, quand ρ_1 ou ρ_2 varie seule, deux autres conditions analogues soient vérifiées.

On en déduit immédiatement que les lignes de courbure de chacune des surfaces du système sont planes. En effet, laissons ρ_2 constante et faisons varier ρ et ρ_1. Nous obtiendrons une surface du système dont la normale sera parallèle à Oz et dont la représentation sphérique des lignes de courbure sera fournie par le déplacement du point C de l'axe Oz qui se trouve à une distance de l'origine égale à l'unité de longueur. La ligne de courbure qui correspond à la variation de ρ seule aura donc pour représentation sphérique la ligne décrite par C quand ρ varie seule. Mais puisqu'alors la rotation se fait autour d'un axe permanent, le point C décrira un cercle de la sphère. Or, les tangentes aux différents points d'une ligne de courbure sont parallèles aux tangentes aux points correspondants de sa représentation sphérique. Donc toutes ces tangentes sont dans un même plan et la ligne de courbure considérée est bien plane. Il en est évidemment de même de toutes les autres lignes de courbure obtenues en faisant varier seule soit ρ, ρ_1 ou ρ_2.

3. *Détermination de la représentation sphérique du système orthogonal.* — On voit de plus que la représentation sphérique de chaque surface du système se compose d'un réseau de cercles orthogonaux. Or on

sait qu'un pareil réseau tracé sur une sphère est formé des cercles dont les plans passent par l'une ou l'autre de deux droites conjuguées par rapport à la sphère.

Soit OABC l'une des positions du tétraèdre mobile, A, B, C étant à une distance de l'origine égale à l'unité de longueur. Nous venons de voir que si ρ varie seule, ce tétraèdre tourne autour d'un axe permanent qui est l'intersection des plans OBC et OYZ. Donc le point C décrit un petit cercle dont le plan est perpendiculaire à cet axe et par conséquent parallèle au plan OAX et, en particulier, à la droite fixe OX. Si maintenant nous faisons varier ρ_1, le plan de ce cercle se déplacera en passant par une droite fixe (D) ; puisqu'il reste parallèle à OX, il faut que la droite (D) soit parallèle à OX. De même quand ρ_1 varie seule le point C décrit un cercle dont le plan est parallèle à OY, et quand ensuite on fait varier ρ_1 le plan de ce cercle tourne autour d'une droite (D′) parallèle à OY. Enfin, puisque les droites (D) et (D′) doivent être conjuguées, il faut que leur perpendiculaire commune passe par le centre de la sphère ; celle-ci est donc l'axe OZ. On voit alors que la représentation sphérique de tout le système doit être telle que si l'une des trois variables reste constante, le point correspondant du tétraèdre mobile décrive un réseau orthogonal formé de cercles dont les plans passeront par deux droites conjuguées perpendiculaires à l'axe de coordonnées correspondant. Il reste à voir si une pareille représentation sphérique est possible.

Soit OABC une position particulière du tétraèdre mobile. Par A, je mène dans le plan tangent à la sphère les droites AQ et AR respectivement parallèles à OB et OC ; de même par B les droites BP′ et CR′ respectivement parallèles à OA et OC, et enfin par C les droites CP″ et CQ″ respectivement parallèles à OA et OB. Par AQ je fais passer un plan parallèle à OY, lequel rencontre l'axe OX en G et coupe le plan OXY suivant une droite (E) parallèle à OY. Je prends sur OX le point G_1 conjugué de G par rapport à la sphère et par G_1 je mène la droite (F) parallèle à OZ. Les deux droites (E) et (F) sont conjuguées. Les plans passant par A et par chacune des deux droites (E) et (F) doivent donc couper la sphère suivant deux cercles orthogonaux ; donc ils coupent le plan tangent en A suivant deux droites perpendiculaires, et puisque le premier passe par AQ le second passe par AR. Si alors j'avais mené par AR un plan parallèle à OZ, ce plan, identique au plan passant par A et (F), aurait coupé OX au point G_1 conjugué de G. De même les plans parallèles à OX et à OZ menés par BP′ et CQ′ détermineront sur OY les deux points conjugués H et H_1 par lesquels passeront les deux droites conjuguées (D′) et (F′) parallèles à OX et OZ. Enfin les plans menés par CP″ et CQ″ parallèlement à OX et OY détermineront sur OZ les points conjugués K et K_1, par lesquels passeront les deux droites conjuguées (D″) et (E″) respectivement parallèles à OX et à OY.

Désignons par OU, OV, OW les intersections respectives des trois plans OBC, OCA, OAB avec les plans de coordonnées OYZ, OZX, OXY. OU est perpendiculaire à la fois à OA et à OX ; OV à OB et à OY ; OW à OC et à OZ.

La position du trièdre OABC dépend de trois paramètres. A chacune de ses positions correspondent trois couples de points conjugués, un sur chacun des axes. Supposons qu'on fixe les points K et K_1. On définira ainsi sur la sphère le réseau des cercles orthogonaux dont les plans passent respectivement par (D″) et (E″), réseau décrit par le point C. Les tangentes à deux de ces cercles, en l'un de leurs points d'intersection, rencontreront respectivement les droites (D'') et (E''), et le trièdre formé par le rayon de la sphère OC et les parallèles menées du centre à ces deux tangentes sera l'une des positions du trièdre précédent; mais l'ensemble de ces nouvelles positions ne dépend plus que de deux paramètres. Si l'on déplace le point C sur celui de ces deux cercles dont le plan passe par (D''), la rotation se fera autour de l'axe OU qui est perpendiculaire au plan de ce cercle puisqu'il est perpendiculaire d'une part à la tangente de ce cercle parallèle à OA et d'autre part à OX parallèle à (D''). Si on le déplace sur l'autre cercle, la rotation se fera autour de OV. Si alors on veut passer d'une position à une autre infiniment voisine, mais quelconque dans l'ensemble à deux paramètres, il faudra faire tourner le trièdre autour d'un axe situé dans le plan OUV.

Supposons maintenant qu'on fixe les points H et H_1. On aura un nouvel ensemble de positions du trièdre et l'on passera de l'une à l'autre infiniment voisine par une rotation autour d'un axe situé dans le plan OUW. Si alors on fixe à la fois les points H, H_1 et les points K et K_1 le trièdre ne pourra plus que tourner autour de l'axe OU, si les trois droites OU, OV, OW ne sont pas dans un même plan, ce qu'on peut toujours supposer puisque le trièdre initial est absolument quelconque, si toutefois la position du trièdre mobile dépend bien, comme nous l'avons supposé, de trois variables indépendantes.

Le trièdre tournant autour de OU, les points G et G_1 se déplaceront nécessairement sur OX. En effet, on peut amener le trièdre à une position infiniment voisine quelconque dans l'ensemble à trois paramètres en le faisant tourner successivement autour de OU, OV et OW. La première rotation laisse fixes les points H, H_1, K et K_1. Les deux autres laissent fixes les points G et G_1. Donc, si G et G_1 restaient fixes pendant la rotation autour de OU, ils resteraient immobiles pour tout déplacement du trièdre, même pour un déplacement fini que l'on peut toujours considérer comme une suite de déplacements infiniment petits. Mais alors il arriverait que, quelle que fût la valeur de ρ, le point A décrirait toujours le même réseau sphérique, et la position du trièdre ne dépendrait que de deux paramètres.

Ainsi quand le trièdre tourne autour de OU, sa position est fonction de celle des deux points conjugués G et G_1 et si l'on considère l'ensemble de toutes les positions possibles du trièdre mobile, cette position est une fonction de trois variables ρ, ρ_1, ρ_2 servant à fixer l'une la position des points conjugués G et G_1, l'autre celle de H et H_1, et la troisième celle de K et K_1. Quand l'une de ces trois variables varie seule, le trièdre tourne autour de l'une des trois droites OU, OV, OW conformément aux conditions de notre problème, et ainsi se trouve constituée la représentation sphérique du système orthogonal.

4. *Cas où l'ensemble des positions du trièdre mobile ne dépend que de deux paramètres.* — Examinons maintenant le cas où les trois droites OU, OV, OW sont dans un même plan (T). La droite OU, intersection des plans OBC et OYZ, est perpendiculaire à la fois à OA et à OX. Donc, le plan OAX est perpendiculaire au plan (T). Il en est de même des plans OBY et OCZ. Alors ces trois plans passeront par une même droite OS perpendiculaire au plan (T). La position du trièdre est déterminée par celle de la droite OS, et,

comme celle-ci a une direction arbitraire, l'ensemble des positions du trièdre satisfaisant à la condition indiquée, dépend de deux paramètres, comme cela résulte d'ailleurs de la discussion précédente. Laissons fixes les points K et K_1 : nous aurons encore sur la sphère un réseau de cercles orthogonaux que décrira le point C. Les plans de ces cercles passeront l'un par la droite (D'') parallèle à OX et l'autre par la droite (E'') parallèle à OY. Le premier contient de plus la tangente au cercle, laquelle est parallèle à OA, et l'autre la tangente au second cercle, parallèle à OB. Donc le premier plan est parallèle au plan OAX et l'autre au plan OBY. L'intersection CI des plans des deux cercles est donc parallèle à OS et par conséquent aussi au plan OCZ qui contient OS. Mais le plan OCZ passe par le point C. Donc la droite CI est dans ce plan-là et rencontre l'axe OZ. Mais le plan d'un des deux cercles rencontre OZ en K et l'autre en K_1. Il faut donc que les deux points K et K_1 coïncident, et comme ils sont conjugués, ils ne peuvent se confondre qu'en l'un des points Z_1 où l'axe OZ rencontre la sphère, et les deux droites (D'') et (E'') sont en ce point-là tangentes à la sphère.

De même les points G et G_1 se confondent en l'un des points d'intersection X_1 de la sphère avec l'axe OX, et les points H et H_1 en l'un des points d'intersection Y_1 de la sphère avec OY. Les trois variables ρ, ρ_1, ρ_2 ne peuvent plus servir à fixer la position de ces points devenus tous immobiles. Si on laisse ρ_2 invariable, on aura sur la sphère le réseau des cercles orthogonaux dont les plans passent par l'une ou l'autre des tangentes à la sphère en Z_1, parallèles à OX ou à OY. Si l'on fait varier ρ_2 ce réseau reste le même, mais les cercles correspondant à une même valeur de ρ ou

ρ_1 sont modifiés. Il en résulte que toutes les surfaces d'une même famille ont la même représentation sphérique, et même que toutes les surfaces des trois familles ont des représentations sphériques égales, mais différant par leur position sur la sphère. Au reste, une pareille représentation sphérique d'un système orthogonal existe bien, puisque c'est celle du système formé par les sphères tangentes à l'origine à l'un ou à l'autre des trois plans de coordonnées. Nous verrons plus loin que la même représentation sphérique appartient aussi à des systèmes composés de cyclides particulières.

Enfin il ne faut pas omettre le cas particulièrement simple où la position du trièdre mobile ne dépend que des variables ρ et ρ_1 et reste la même quand on fait varier ρ_2.

5. *Les surfaces formant le système orthogonal réversible ont toutes leurs lignes de courbure circulaires.* — Passons maintenant à l'étude des surfaces composant le système orthogonal réversible. Il résulte déjà de la représentation sphérique trouvée que les lignes de courbure sont toutes planes. Nous allons démontrer que de plus elles sont circulaires. Soit M un point quelconque par où passent trois surfaces orthogonales. Lorsque ρ varie seule, le trièdre des trois normales $Mxyz$ tourne autour d'un axe MT de direction invariable, situé dans le plan Myz, et subit en même temps un mouvement de translation dont la direction est constamment celle de Mx perpendiculaire à l'axe de rotation. Ces deux mouvements se composent en une simple rotation autour d'un axe parallèle au premier et situé aussi dans le plan Myz perpendiculaire à la translation. Donc le lieu des axes instantanés dans le trièdre

mobile est le plan Myz, et le mouvement résulte du roulement de ce plan sur un cylindre fixe. Le mouvement inverse est donc défini par le roulement de ce cylindre sur un plan fixe. Si le système est réversible, ce cylindre devrait être un plan, ce qui est impossible; le mouvement doit donc se faire autour d'un axe permanent et la trajectoire du point M est un cercle. Comme il en est évidemment de même dans la variation de ρ ou de ρ_2 *toutes les lignes de courbure du système sont des cercles*. La condition est manifestement suffisante. Les seules surfaces dont toutes les lignes de courbure sont circulaires sont les cyclides de Dupin ou les surfaces qui en dérivent par dégénérescence, telles que la sphère, le plan, les cônes et les cylindres de révolution, si l'on considère les droites comme des cercles de rayon infini. Donc, en laissant de côté les systèmes banaux, on peut conclure que : *tous les systèmes orthogonaux réversibles sont composés de cyclides.*

6. *Les cyclides, enveloppes de sphères.* — Avant d'expliquer comment on peut construire le système orthogonal, je crois utile de rappeler les principales propriétés des cyclides, quoique ces surfaces aient déjà été l'objet de nombreux travaux de la part de plusieurs géomètres. J'en ai fait, moi-même, autrefois une étude sommaire en les considérant comme enveloppe d'une sphère qui reste tangente à trois sphères fixes (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, juin, août et octobre 1892). Ici, je me propose d'en faire dériver les principales propriétés du seul fait que toutes les lignes de courbure sont circulaires. D'abord, une pareille surface existe bien, car on en obtient une en faisant l'inversion d'un cône de révolution par rapport à un point quelconque de l'espace. Nous savons

déjà que la représentation sphérique des lignes de courbure se compose de cercles orthogonaux dont les plans passent par l'une ou l'autre de deux droites conjuguées. Ces droites conjuguées peuvent couper leur perpendiculaire commune en deux points distincts, ou bien être tangentes au même point de la sphère. Mais il y a des remarques générales qui s'appliquent aux deux cas.

Le plan d'une ligne de courbure circulaire coupe la surface sous un angle constant. On peut donc faire passer par chaque cercle de courbure une sphère circonscrite à la surface. La surface est l'enveloppe de toutes celles de ces sphères qui passent par les lignes de courbure d'une même famille. Comme il y a deux familles de lignes de courbure, la cyclide est l'enveloppe commune de deux familles de sphères. Il en résulte que deux sphères appartenant à deux familles différentes sont tangentes au point de la cyclide par où passent les deux lignes de courbure correspondantes, et que chaque sphère d'une famille est tangente à toutes les sphères de l'autre. Il faut trois sphères pour définir une famille de sphères qui leur soient tangentes ; mais il faut de plus choisir parmi les centres de similitude de ces trois sphères, trois de ces centres en ligne droite, de manière que les points de contact de la sphère mobile avec deux des sphères fixes soient antihomologues par rapport à l'un des centres. Comme il y a quatre axes de similitude, il y a quatre familles de sphères tangentes à trois sphères données. Il faut se borner à l'une d'elles. Considérons comme positif un contact intérieur et comme négatif un contact extérieur. Si l'on envisage toutes les sphères tangentes à deux sphères fixes, les points de contact étant antihomologues par rapport au centre de similitude S, les deux contacts seront de même espèce ou d'espèces différentes suivant que le point S sera le centre de similitude direct ou inverse. En d'autres termes le produit des deux contacts reste le même quand on ne change pas le centre de similitude. Donc, dans le cas de notre famille de sphères tangentes à trois sphères fixes, les produits des contacts deux à deux restent invariables, c'est-à-dire qu'un des contacts ne peut changer d'espèce sans que les deux autres en changent aussi. Finalement, *la cyclide est l'enveloppe des sphères tangentes à trois sphères fixes, les trois contacts restant de même espèce, ou changeant d'espèce en même temps.*

7. *Points coniques, plans circonscrits, plans de symétrie.* — Les trois sphères fixes se coupent en deux points réels ou imaginaires qui sont les sphères de rayon nul de la première famille, et qui par conséquent doivent se trouver sur toutes les sphères de la deuxième famille, à laquelle appartiennent les trois sphères fixes. De plus, parmi les sphères de la première famille figurent deux plans réels ou imaginaires qui sont tangents aux trois sphères primitives. Toutes les sphères de la seconde famille doivent être tangentes à ces deux plans. Alors en considérant la surface comme l'enveloppe des sphères de la seconde famille, on voit que *la cyclide est l'enveloppe des sphères qui passent par deux points fixes et qui sont tangentes à un plan fixe.* Ces sphères sont par suite également tangentes au plan symétrique du premier par rapport au plan perpendiculaire à la droite des deux points fixes en son milieu.

Les caractéristiques de ces sphères sont des cercles de la cyclide qui passent par les deux points fixes et qui doivent toucher chacun des deux plans fixes sur le cercle de la cyclide qui se trouve dans ce plan. Donc : *La cyclide est le lieu des cercles qui passent par deux points fixes et qui sont tangents à deux plans fixes symétriques par rapport au plan perpendiculaire à la droite des deux points fixes, en son milieu.* Il est bien entendu que, dans certains cas particuliers, les deux points fixes peuvent se confondre ainsi que les deux plans fixes.

Les points fixes sont des points coniques de la cyclide, les plans fixes des plans circonscrits. Comme chaque famille de sphères contient deux sphères de rayon nul et deux plans, la cyclide admet quatre points coniques et quatre plans circonscrits réels ou imaginaires, distincts ou confondus. Nous appellerons *axe radical d'une cyclide* chacune des droites qui joignent les deux points coniques d'une même famille. Parmi les sphères de l'autre famille qui passent toutes par ces deux points se trouvent les deux plans circonscrits de cette famille-là, d'où il suit que chacun des deux axes radicaux est la droite d'intersection des deux plans circonscrits d'une même famille. Ils sont perpendiculaires entre eux et parallèles aux deux droites fixes par où passent les plans des cercles de la représentation sphérique.

On en déduit immédiatement que la cyclide admet deux plans de symétrie dont chacun passe par l'un des axes radicaux et est perpendiculaire à l'autre au milieu de la distance des deux points coniques situés sur cet autre. Chacun de ces plans contient les centres de toutes les sphères qui passent par les points coniques qu'il ne contient pas.

8. *La cyclide est une surface anallagmatique. — Cône des tangentes au point conique. — Lieu des*

centres des sphères d'une même famille. — L'inversion transforme la cyclide en une autre cyclide puisque les lignes de courbure circulaires se transforment en d'autres cercles. Si le pôle d'inversion est sur l'un des axes radicaux, et le module convenablement choisi, toutes les sphères passant par les points coniques situés sur cet axe se transforment en elles-mêmes et la cyclide se reproduit. C'est une surface *anallagmatique*. Si le pôle d'inversion est à l'un des points coniques, toutes les sphères qui passent par ce point se transforment en des plans qui passent par le point transformé de l'autre point conique situé sur le même axe radical, et comme tous ces plans doivent être tangents à une sphère de l'autre famille, ils enveloppent un cône de révolution qui est la transformée de la cyclide. Ce cône devient un cylindre si les deux points coniques se confondent. De là résulte que : *le cône des tangentes en chaque point conique est de révolution*, puisque les cercles passant par les points coniques se sont transformés dans les génératrices du cône, lesquelles font un angle constant avec l'axe radical.

Cette proposition résulte aussi de ce fait que le cône circonscrit le long d'un cercle de courbure est de révolution. A la limite, ce cône devient le cône des tangentes. Il résulte encore de ce qui précède que toute cyclide est la figure inverse d'un cône ou d'un cylindre de révolution.

Coupons une cyclide par un de ses plans de symétrie (P). Les sphères ayant leur centre dans ce plan sont coupées suivant des grands cercles (C). Considérons trois de ces grands cercles. Il existe dans le plan (P) deux cercles (ω) et (ω') tangents à ces trois-là avec les conditions de contact imposées. Ce sont les grands cercles de deux sphères tangentes aux trois sphères ayant pour grands cercles les cercles (C) choisis. Elles font donc partie de la seconde famille et doivent être tangentes à toutes les sphères de la première famille. Donc tous les cercles (C) sont tangents aux cercles (ω) et (ω') et le lieu de leur centre, c'est-à-dire le lieu des centres des sphères de la première famille, est une conique admettant pour foyers les centres des cercles (ω) et (ω'). On en déduit que :

La cyclide est l'enveloppe des sphères qui ont leur centre dans un plan fixe et qui sont tangentes à deux cercles fixes tracés dans ce plan, toujours avec les mêmes restrictions relatives à l'espèce des contacts. Il reste entendu que l'un des cercles peut se réduire à une droite ou à un point.

De plus, les deux coniques qui constituent chacune le lieu des centres des sphères d'une des deux familles, sont focales l'une de l'autre. En effet, chaque sphère S de l'une des familles touche toutes celles de l'autre famille en des points qui sont sur le cercle le long duquel la sphère (S) touche son enveloppe. Les droites qui joignent le centre de la sphère (S) aux centres de toutes les sphères de l'autre famille passent par les points de contact et forment un cône de révolution. Le lieu des centres de (S) est donc le lieu des sommets des cônes de révolution qui passent par une conique, lieu des centres des sphères de l'autre famille, c'est-à-dire la focale de cette conique.

9. *Cyclide du quatrième ordre. Elle admet deux plans circonscrits réels et deux imaginaires.* — Reportons-nous à la représentation sphérique formée des cercles dont les plans passent par les droites (D'') et (E'') et supposons que ces deux droites coupent leur per-

pendiculaire commune en deux points distincts. Chaque plan circonscrit à la cyclide doit correspondre à un plan tangent à la sphère puisqu'en tous les points de contact les normales sont parallèles. Or des deux droites conjuguées (D″) et (E″), l'une coupe la sphère et l'autre lui est extérieure. Donc on peut mener à la sphère par ces droites deux plans tangents réels et deux autres imaginaires. D'autre part, si la direction d'un plan circonscrit est réelle, ce plan est aussi réel puisqu'il doit passer par l'un des axes radicaux de la surface, lesquels sont réels l'un et l'autre. Donc, parmi les quatre plans circonscrits à la cyclide, il y en a toujours deux réels et deux imaginaires.

10. *Différentes formes des cyclides du quatrième ordre.* — Nous pouvons maintenant passer en revue les différentes formes que peut affecter une cyclide.

D'abord, si l'une des droites (D″) ou (E″) est rejetée à l'infini, l'autre passe par le centre de la sphère, la représentation sphérique se compose de méridiens et de parallèles, et la surface est un *tore*.

Dans le cas général, soient (P) et (Q) les deux plans circonscrits réels qui se coupent suivant l'axe radical (R). L'autre axe radical (T) est perpendiculaire à (R). Supposons qu'il ne coupe pas (R). Il coupe (P) et (Q) en deux points A et B. Si les points coniques situés sur (T) sont A et B, la cyclide se réduit à la sphère tangente à (P) et à (Q) en A et en B. Si les points coniques étaient en dehors du segment AB, toutes les sphères tangentes à (P) et à (Q) seraient imaginaires, et la cyclide elle-même imaginaire. Supposons-les donc entre A et B. Le lieu des points de contact de (P) avec les sphères dont la cyclide est l'enveloppe est un cercle de centre A. Tant que le rayon ρ de ce cercle est suffisamment petit, les sphères tangentes à (P) coupent la droite AB en deux points réels et la cyclide a la forme d'un tore à points coniques réels que l'on aurait déformé en le comprimant d'un côté. Quand le rayon ρ grandit, les points A et B se rapprochent, et avant que le cercle de rayon ρ soit devenu tangent à l'axe radical (R), ces deux points coniques se réunissent au milieu de AB. Alors la cyclide est l'analogue du tore engendré par un cercle tournant autour d'une de ses tangentes.

Le rayon ρ grandissant encore, mais restant plus petit que la distance de A à l'axe radical (R), les points coniques deviennent imaginaires et la cyclide a la forme d'un anneau plus épais d'un côté que de l'autre. Quand le cercle de centre A est devenu tangent à l'axe radical (R), la diminution de l'épaisseur de l'anneau est devenue telle qu'au point de contact cette épaisseur est réduite à zéro. La cyclide a la forme d'un fuseau à filer qu'on aurait courbé sur son axe jusqu'à ce que les deux pointes se rejoignent.

Si enfin le cercle de centre A coupe l'axe radical (R) les points coniques apparaissent dans la famille des sphères admettant cet axe radical, et la cyclide a la forme de deux fuseaux à filer recourbés l'un et l'autre de manière à se joindre par leurs pointes.

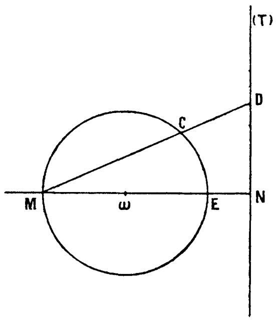
Il peut encore arriver que les deux axes radicaux se coupent en un point sur lequel viendront alors se confondre les points A et B. Le cercle de centre A est composé de deux parties égales séparées par l'axe radical (R) ; les deux fuseaux recourbés sont égaux, et la cyclide admet un troisième plan de symétrie qui est le plan des droites (R) et (T).

11. *Généralités sur les cyclides du troisième ordre.* — Les surfaces que nous venons d'étudier sont du

quatrième ordre, puisque les plans passant par un des axes radicaux les coupent suivant deux cercles. Examinons maintenant le cas où la représentation sphérique se compose de cercles dont les plans passent par l'une ou l'autre de deux droites (D) et (E) rectangulaires et tangentes en un même point de la sphère. Alors les deux plans circonscrits d'une même famille se confondent comme les deux plans tangents à la sphère menés par la droite (D). Il y a dans chaque famille un plan circonscrit et ces deux plans sont parallèles. Les deux axes radicaux (R) et (T), respectivement parallèles à (D) et à (E), sont deux droites perpendiculaires entre elles et situées chacune dans l'un des plans circonscrits, par exemple (R) dans (P), et (T) dans (Q). Les sphères (S) coupent l'axe radical (R) en deux points A et B et sont tangentes au plan (Q). Le lieu de leurs points de contact est l'intersection de ce plan avec le plan perpendiculaire à (R) au milieu de AB. Parmi ces sphères il y en a deux de rayon nul dont les centres sont nécessairement sur le lieu des points de contact. Il en résulte que ce lieu n'est autre que l'axe radical (T). Ainsi chacun des deux plans circonscrits touche la cyclide le long d'un axe radical. Les plans de symétrie sont ceux qui passent par l'un des axes radicaux et qui sont perpendiculaires à l'autre.

Soit MN (*fig.* 1) la perpendiculaire commune aux deux axes radicaux, M sur (R) et N sur (T). Parmi toutes les sphères (Σ) admettant l'axe radical (T), il y en a une qui a son centre ω sur MN et qui passe en M où elle est tangente à (R). Elle coupe suivant un grand cercle le plan (V) passant par MN et par (T) que nous avons pris pour plan de la figure. Les sphères (S) sont alors celles qui ont leur centre dans le plan (V) et qui sont tangentes à la fois à la droite (T) et au cercle (ω), le contact avec ce cercle restant de même espèce tant que la sphère reste d'un même côté du plan circonscrit passant par (T) et changeant d'espèce quand la sphère

Fig. 1.



passe de l'autre côté du plan. Elles doivent comprendre comme cas limite le plan perpendiculaire à (V) passant par (R). Le lieu de leurs centres est une parabole ayant pour foyer ω et pour directrice une parallèle à (T). Le lieu des centres des sphères de l'autre famille est la parabole focale de celle-là.

Soit une de ces sphères de la famille (S). Elle touche le cercle (ω) et la droite (T) en deux points C et D qui d'après une propriété élémentaire sont alignés sur le point M. La sphère considérée touche donc la cyclide suivant le cercle de diamètre CD situé dans le plan perpendiculaire à (V), plan qui contient bien, comme cela doit être, l'axe radical (R) dont le pied est en M. La cyclide est donc le lieu de ces cercles CD obtenus en faisant pivoter une droite autour de M. Les surfaces ainsi obtenues sont du troisième ordre. Chacune d'elles est complètement définie par une droite (T) et un cercle (ω) situé dans un même plan, avec l'indication de celle des deux extrémités du diamètre de (ω) perpendiculaire à (T) qui doit jouer le rôle de centre de pivotement.

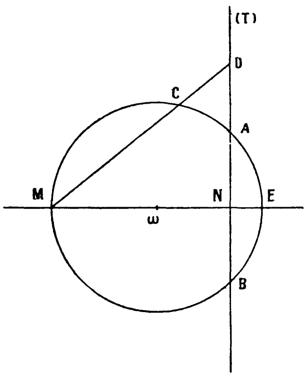
12. *Différentes formes de cyclides du troisième ordre.* — Supposons d'abord que le cercle (ω) ne coupe pas la droite (T) et qu'on prenne pour centre de pivotement le point du cercle le plus éloigné de la droite (T) (*fig.* 1). La surface est alors tout entière comprise entre les deux plans circonscrits passant par M et N. Elle a la forme d'une sorte de double trompe ayant sa partie la plus étroite le long du cercle de diamètre EN compris dans le plan perpendiculaire à (T) entre (ω) et (T), et s'évasant des deux côtés indéfiniment. On peut encore la considérer comme engendrée par les cercles de l'autre famille qui sont dans les plans passant par (T). Le point M sera remplacé par N, le cercle (ω) par le cercle de diamètre EN dans le plan perpendiculaire à (V) et la droite (T) par la droite (R). On lui trouve ainsi la forme d'une double trompe ayant sa partie la plus étroite le long du cercle (ω) et s'évasant indéfiniment de chaque côté du plan (V). Cette surface contient les deux droites (T) et (R).

Si le cercle (ω) est tangent à la droite (T), la double trompe se rétrécit dans sa partie la plus étroite jusqu'à présenter un point conique au point N. Mais si l'on considère les cercles de la même famille que (ω), on verra qu'ils sont tous tangents à la droite (T) au point N. Le cône des tangentes au point conique se réduit à cette droite. Ce cas est le même que celui où le cercle (ω) se réduirait à un point.

Si le cercle (ω) coupe la droite (T) en deux points A et B (*fig.* 2), la surface comprendra deux trompes partant des points coniques A et B et une sorte de fuseau recourbé à l'intérieur de la sphère (ω) de l'autre côté de (T).

Supposons maintenant que le cercle (ω) ne coupant pas la droite (T), on ait pris pour pied de la droite (R)

Fig. 2.



le point le plus rapproché de (T), soit E (*fig.* 1). Alors si l'on considère les cercles de l'autre famille, il faudra remplacer le cercle (ω) par le cercle de diamètre MN dans le plan perpendiculaire à (V). Comme celui-ci coupe l'axe radical (R) dont le pied est en E, la cyclide aura la forme du cas précédent, et la discusssion est épuisée.

Enfin, si les deux plans circonscrits se confondent, la cyclide se réduit à une sphère accompagnée du plan des deux axes radicaux, comme on le voit sur la figure 2 en rapprochant indéfiniment le point M du point N.

13. *Sections planes des cyclides.* — Il convient d'ajouter quelques mots sur les sections planes des cyclides. Toutes les sphères d'une même famille étant cir-

conscrites à la surface coupent le plan sécant (P) suivant des cercles tangents à la section plane. Ces courbes sont donc l'enveloppe commune de deux familles de cercles. Soit A le point où l'un des axes radicaux de la cyclide coupe le plan sécant (P). Ce point a la même puissance par rapport à tous les cercles correspondants situés dans le plan (P). Si l'on prend ce point A pour pôle d'inversion avec sa puissance pour module, les cercles demeureront inaltérés, et leur enveloppe ne sera pas changée. Comme il y a deux axes radicaux, les sections planes des cyclides sont des courbes doublement anallagmatiques.

La cyclide étant un lieu de cercles contient le cercle de l'infini. Dans les cyclides du quatrième ordre ce cercle est une ligne double de la surface parce que chaque plan passant par l'un des axes radicaux contient deux cercles de courbure qui se coupent aux deux points cycliques de ce plan. Donc toutes les sections planes admettent pour points doubles les points cycliques du plan sécant. Dans les cyclides du troisième ordre, le cercle de l'infini est une ligne simple de la surface puisque chaque plan passant par l'un des axes radicaux ne contient qu'un cercle de courbure ; mais le plan de l'infini coupe en plus la surface suivant une droite située dans les plans parallèles aux plans circonscrits. Donc la section faite par le plan (P) admet pour asymptotes deux droites isotropes du plan (P) et une parallèle à l'intersection de (P) avec l'un des plans circonscrits. Les points A et B, où le plan sécant coupe les deux axes radicaux, font partie de la section ; en ces points la tangente est située dans le plan circonscrit correspondant, et par suite parallèle à l'asymptote.

Revenons au cas général : si le plan sécant est tangent en M à la surface, le point M est un point double de l'intersection qui présente ainsi avec les points cycliques trois points doubles. La section est donc unicursale. Cette conclusion subsiste dans le cas des cyclides du troisième ordre. Si enfin le plan est bitangent à la cyclide, on trouve quatre points doubles sur la section. Celle-ci doit donc se décomposer en deux coniques qui sont forcément des cercles puisqu'elles passent l'une et l'autre par les points cycliques. Enfin, l'inversion montre que de même toute sphère bitangente à une cyclide la coupe suivant deux cercles. Le reste de l'intersection est le cercle de l'infini compté comme ligne double. En particulier, toute sphère passant par les deux points coniques coupe la cyclide suivant deux cercles.

En ce qui concerne les cyclides du troisième ordre, remarquons que les plans parallèles aux plans circonscrits coupent la surface suivant une droite à l'infini et une conique; celle-ci, quand elle est réelle, est toujours une hyperbole si la cyclide n'a pas de points coniques réels (*fig.* 1). Si les points coniques sont réels, la section est une hyperbole si le plan sécant passe entre M et N (*fig.* 2), une ellipse si le plan sécant est de l'autre côté de la droite (T). Si le plan sécant passe par le point E, le centre de la conique étant justement le point E, celle-ci se réduit à deux droites qui sont réelles dans le cas de la figure 1 et imaginaires dans le cas de la figure 2. Nous allons voir qu'en dehors des axes radicaux, des droites isotropes et de la droite de l'infini dans le plan parallèle aux deux axes radicaux, ces deux droites sont les seules qui se trouvent sur la surface. Si en effet la cyclide contient une droite (D) elle contiendra aussi la droite (D′) symétrique de (D) par rapport au plan (V) de la figure 1. Alors le plan (W) des deux droites (D) et (D′) coupera la cyclide suivant une troisième droite qui devra contenir les points cycliques du plan (W). Ce sera donc la droite de l'infini. Mais la surface ne contient pas d'autre droite à l'infini que celle qui est dans le plan parallèle aux deux axes radicaux. Donc le plan (W) est parallèle à ces deux axes radicaux, et les deux droites (D) et (D′) sont bien celles dont nous venons de parler. Les plans bitangents à la cyclide sont ceux qui passent par l'une ou l'autre de ces droites. Ils coupent la cyclide suivant un cercle en outre de cette droite. Enfin une sphère bitangente coupe la cyclide suivant deux cercles ; le reste de l'intersection est le cercle de l'infini.

14. *Le système orthogonal. — Symétrie par rapport à trois plans rectangulaires.* — Arrivons maintenant à la construction du système triplement orthogonal réversible. Je ne m'occuperai que des systèmes réels. Considérons d'abord les systèmes composés de cyclides du quatrième ordre, c'est-à-dire ceux qui correspondent au cas général de la représentation sphérique. Nous savons déjà par les propriétés de cette représentation sphérique que chaque cyclide du système a ses deux axes radicaux parallèles à deux des axes de coordonnées et par conséquent ses deux plans de symétrie parallèles à deux plans de coordonnées.

Soient (X) l'un des plans de symétrie d'une cyclide et (C) un des cercles de courbure de cette cyclide dont le plan perpendiculaire à (X) peut n'être supposé parallèle à aucun plan de coordonnées. Par (C) passe une cyclide de la deuxième famille dont un des plans de symétrie doit passer par l'axe du cercle (C), axe situé dans le plan (X). Par hypothèse, cet axe n'est parallèle à aucun plan de coordonnées autre que celui qui est parallèle à (X). Donc le plan de symétrie de la seconde cyclide est aussi (X). Il en sera de même pour toutes les autres cyclides de la seconde famille.

On verra de même que le deuxième plan de symétrie de la première cyclide sera aussi un plan de symétrie commun à toutes les cyclides de la troisième famille. On en déduit aisément que :

Les plans de symétrie de toutes les cyclides se réduisent à trois plans rectangulaires. Toutes les cyclides d'une même famille sont symétriques par rapport à deux de ces trois plans fixes. Chacun de ces trois plans est un plan de symétrie commun à toutes les cyclides de deux familles.

Prenons ces trois plans pour plans de coordonnées. Puisqu'il existe deux familles de surfaces symétriques par rapport au plan OXY, l'ensemble de tout le système doit être symétrique par rapport à ce plan et comme les surfaces de la troisième famille ne l'admettent pas pour plan de symétrie, il faut que ces surfaces soient deux à deux symétriques par rapport à ce plan-là.

15. *Les douze tores dont six réels et six imaginaires.* — La représentation sphérique de l'une des cyclides se compose des cercles dont les plans passent par les deux droites rectangulaire (D'') et (E''). Si l'une de ces droites est rejetée à l'infini, la cyclide correspondante est un tore. A chaque position des droites (D'') et (E'') correspondent deux cyclides égales et symétriques par rapport au plan OXY; comme chacune des deux droites (D'') et (E'') peut être rejetée à l'infini, chaque famille comprend quatre tores deux à deux sy-

métriques par rapport à l'un des plans de coordonnées. Nous allons voir que de ces quatre tores, deux sont réels et deux imaginaires.

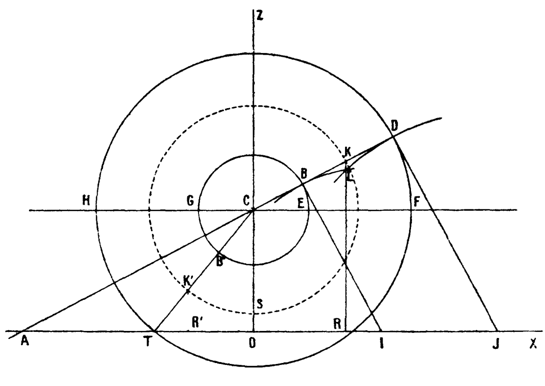
Considérons une cyclide symétrique par rapport au plan OXY et supposons que celui des deux axes radicaux (R) par où passent les deux plans circonscrits réels soit dans ce plan OXY et parallèle à OY. Ces deux plans touchent la cyclide suivant des cercles par chacun desquels passe une cyclide de la deuxième famille. Mais cette deuxième cyclide doit être normale au plan (P) circonscrit à la première. Donc la sphère qui passe par le cercle situé dans le plan (P), et qui est circonscrite à la deuxième cyclide doit avoir son centre dans le plan (P), et le cercle considéré est un grand cercle de cette sphère. Or, si l'on se reporte à la génération des cyclides expliquée aux n^{os} 7 et 8, on verra que pour qu'une sphère touche la cyclide suivant un grand cercle, il faut que le plan de ce grand cercle soit un plan de symétrie de la cyclide. Donc le plan (P) est un plan de symétrie de la deuxième cyclide, et comme il n'est parallèle à aucun des plans de coordonnées, il faut que cette deuxième cyclide soit un tore engendré par la rotation du cercle situé dans le plan (P) autour d'une droite située dans le même plan et parallèle à l'un des axes de coordonnées, c'est-à-dire autour d'une droite parallèle à (R), parallèle elle-même à OY. De plus, cet axe du tore devant se trouver dans un des plans de coordonnées sera l'intersection du plan circonscrit (P) avec le plan OYZ. L'autre plan circonscrit (Q) donne naissance à un deuxième tore symétrique du premier par rapport au plan OXY.

Ainsi, *le lieu des cercles de contact des plans circonscrits aux cyclides d'une même famille se compose de deux tores symétriques dont ces cercles sont* *les méridiennes*, d'où il suit que tous ces cercles sont égaux.

Les plans circonscrits imaginaires à la première cyclide donneront naissance de la même manière à deux tores imaginaires appartenant à la troisième famille de cyclides, d'où il résulte bien que chaque famille de cyclides admet deux tores réels et deux imaginaires.

16. *Construction du système orthogonal.* — Dès lors, la construction du système orthogonal ne présente plus aucune difficulté. Considérons deux tores égaux ayant leurs centres C et C′ sur l'axe OZ, leurs axes parallèles à OY, et symétriques par rapport à l'origine. Joignons C et C′ à un point A de l'axe OX. Faisons passer par A une parallèle (R) à l'axe OY et considérons les deux plans (P) et (P′) passant par (R) et C et C′, lesquels coupent les tores suivant les cercles BD et B′ D′. Une cyclide de la seconde famille sera l'enve-

Fig. 3.



loppe des sphères touchant les deux plans P et P′ sur les cercles BD et B′D′ (*fig.* 3, où l'on n'a représenté qu'un seul des deux tores projeté sur le plan OXZ). La seconde famille est formée de toutes les cyclides qu'on obtient de cette manière en faisant faire un tour complet au rayon CBD. Parmi elles figurent les deux tores qu'on obtient en rejetant A à l'infini. Ceux-ci sont symétriques par rapport au plan OZY et admettent pour cercles stationnaires les deux cercles de diamètre EF et $E'F'$ ou bien GH, $G'H'$, dont les plans sont parallèles au plan OXY.

Le troisième couple de tores s'obtient en faisant tourner chacun des cercles stationnaires du premier tore autour de la trace de son plan sur le plan OXY, trace qui est parallèle à OX, et les deux autres familles de cyclides dérivent de ces deux couples de tores comme la seconde famille dérivait des deux tores primitifs.

17. *Le système ainsi défini est bien orthogonal.* Il reste à vérifier que les cyclides ainsi obtenues se coupent bien à angle droit.

La cyclide considérée d'abord et admettant pour plan de symétrie les plans OXZ et OXY coupait, suivant le cercle BD, le tore (C) dont l'axe est parallèle à OY. Menons dans le plan OXZ les tangentes en B et en D aux cercles de rayons CB et CD, lesquelles coupent l'axe OX respectivement en I et en J, et de ces deux points comme centres, traçons les cercles de rayon IB et JD. Ils appartiennent à la cyclide considérée et se coupent en deux points L et L' qui sont deux points coniques de cette cyclide. Par cette droite LL' passe un plan parallèle à OYZ qui coupe la cyclide suivant deux cercles (S) et (S'). Chacun de ces cercles coupe à angle droit le cercle BD en un point qui se projette au milieu K de BD et qui est par conséquent sur le cercle stationnaire du tore (C). De plus, les points de rencontre du cercle (S) avec les cercles BD et B′D′ sont les extrémités d'un diamètre de (S) puisqu'en ces points les tangentes à (S) situées dans les plans (P) et (Q) sont parallèles à OY. Donc le cercle (S) qui a pour axe la parallèle à OX située à l'intersection du plan OXY avec le plan stationnaire du tore (C) est un parallèle du tore ayant pour axe cette même parallèle à OX, tore appartenant à la troisième famille.

De plus, la cyclide coupe ce tore à angle droit. En effet, l'angle des deux surfaces est le même tout le long du cercle d'intersection qui est une ligne de courbure commune et, au point qui se projette en K, le plan tangent à la cyclide est le plan (P) qui est bien normal au deuxième tore, puisqu'il est normal au cercle stationnaire du premier, lequel est une méridienne du second.

De même, le cercle (S′) est un parallèle du deuxième tore de la troisième famille.

Il résulte de là que chacune des cyclides définie comme il a été expliqué, coupe orthogonalement chacun des tores d'une famille à laquelle elle n'appartient pas suivant une méridienne, et chacun des tores de la troisième famille suivant un parallèle. Soient maintenant deux cyclides appartenant à deux familles différentes. Elles couperont l'un des tores de la troisième famille, l'une suivant une méridienne, l'autre suivant un parallèle. Au point M où se coupent les deux cercles, les trois surfaces sont orthogonales puisque chacune des cyclides coupe le tore à angle droit et que les deux courbes d'intersection sont elles-mêmes rectangulaires.

Il reste à prouver qu'elles se coupent suivant un cercle.

Pour fixer les idées, supposons que le tore ait son axe parallèle à OY et son centre sur OZ, comme dans la figure 3. Il admet pour plans de symétrie les plans OYZ et OZX et appartient à la famille dont les axes radicaux sont parallèles à OY et à OX. La cyclide qui le coupe suivant une méridienne a l'un de ses axes radicaux parallèles à OY et situé dans le plan OXY, et l'autre parallèle à OZ et situé dans le plan OYZ. La cyclide qui le coupe suivant un parallèle est symétrique par rapport aux plans OYZ et OXY. L'un de ses axes radicaux est parallèle à OX et situé dans le plan OXY, l'autre parallèle à OZ et situé dans le plan OXZ. La première cyclide coupe le tore suivant un cercle dont le plan passe par l'axe radical parallèle à OX (projeté en A sur la figure 3). Donc le second cercle de la cyclide passant par le point M est dans un plan qui contient l'axe radical parallèle à OZ. Son centre est donc dans le plan OXY. De même l'autre cyclide coupe le tore suivant un parallèle dont le plan parallèle à OXZ coupe le plan OXY suivant une parallèle à OX qui est l'un des axes radicaux de la cyclide. Donc le second cercle de cette cyclide passant en M est dans un plan qui contient l'axe radical parallèle à OZ. Son centre est donc aussi dans le plan OXY. Ainsi les deux cercles doivent être tangents à la normale en M au tore, situés dans le plan parallèle à OZ passant par cette normale et enfin avoir leurs centres dans le plan OXY. Donc ils coïncident et les deux cyclides se coupent suivant un cercle qui est une ligne de courbure commune aux deux surfaces. Comme celles-ci sont orthogonales au point M, elles le sont tout le long du cercle d'intersection.

18. *Lieu des points doubles. — Sections par les plans de coordonnées.* — L'ensemble de tout le sys-

tème est symétrique par rapport aux trois plans de coordonnées, car les cyclides d'une même famille sont symétriques chacune par rapport à deux de ces plans et deux à deux par rapport au troisième. Parmi toutes les cyclides d'une même famille figure le plan par rapport auquel elles sont symétriques deux à deux. Par exemple, sur la figure 3, la cyclide définie par le cercle BD se réduit au plan OYZ si le rayon OBD vient coïncider avec l'axe OZ.

Une cyclide symétrique par rapport au plan OXY coupe ce plan suivant deux cercles qui se coupent en deux points G et G′ qui sont des points coniques de cette cyclide. Par chacun de ces cercles doit passer une cyclide de la deuxième famille, mais celle-là est justement réduite au plan OXY. Les points G et G′ sont des cercles de rayon nul de la famille de lignes de courbure autre que celle des deux cercles précédents. Ils doivent donc être aussi des cercles de rayon nuls de la troisième famille de cyclides, d'où il suit que les deux familles de cyclides symétriques par rapport au même plan de coordonnées ont dans ce plan-là le même lieu de leurs points coniques. D'autre part une cyclide de la deuxième famille doit couper la première cyclide considérée suivant un cercle appartenant à la même famille que les deux cercles situés dans le plan OXY; mais tous ces cercles passent par les points G et G′. Donc toutes les cyclides de la deuxième famille passent par les points G et G′ et par conséquent par le lieu des points coniques de toutes les cyclides des deux autres familles. Réciproquement tout point de l'intersection de l'une des cyclides de la deuxième famille avec le plan OXY se trouve sur un cercle de courbure commun à cette cyclide et à l'une de celles de la première famille, c'est donc l'un des points G ou G′ par où passent tous les cercles de la famille considérée sur la cyclide de la première famille.

Donc : *Toutes les cyclides d'une même famille coupent le plan de coordonnées par rapport auquel elles ne sont pas symétriques suivant une même courbe qui est le lieu des points coniques des cyclides des deux autres familles situés dans ce plan-là.*

Il existe trois de ces courbes, une dans chacun des plans de coordonnées. Comme chaque famille comprend deux tores, ces courbes font partie des courbes du quatrième ordre relativement simples qui résultent de la section d'un tore par un plan parallèle à l'axe; elles sont symétriques par rapport aux deux axes de coordonnées situées dans leur plan.

M. Darboux a fait remarquer que chacune de ces courbes est une focale des deux autres parce qne tout point conique d'une cyclide étant une sphère de rayon nul circonscrite à la cyclide est un foyer de toute section plane de cette surface. (*A suivre.*)