

## Certificats de mécanique rationnelle

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 12 (1912), p. 477-480

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1912\\_4\\_12\\_\\_477\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__477_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1912, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

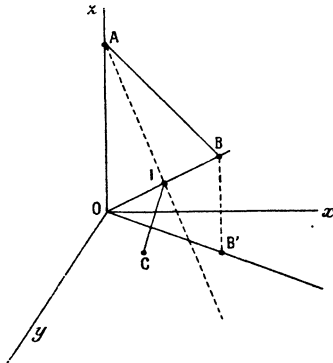
---

---

**CERTIFICATS DE MECANIQUE RATIONNELLE.**

**Clermont-Ferrand.**

**ÉPREUVE THÉORIQUE.** — *Soit le trièdre trirectangle  $Oxyz$ ,*



*dont l'axe des  $z$  est vertical et dirigé vers le haut. Une*

tige rectiligne  $OB$ , homogène, de masse  $2m$  et de longueur  $2a$ , est fixée en  $O$ , d'une part, et attachée en  $B$ , d'autre part, à un fil  $AB$ , de longueur  $2a$ , dont l'autre extrémité est fixée en  $A$ , à la hauteur  $2a$  au-dessus de  $O$ .

Une seconde tige  $IC$ , de masse  $m$  et de longueur  $a$ , est articulée perpendiculairement à la première au milieu  $I$  de  $OB$ . Elle peut tourner sans frottement autour de  $OB$ .

On appelle  $\psi$  l'angle de  $Ox$  avec la projection horizontale  $OB'$  de  $OB$  et  $\varphi$  l'angle (mesuré autour de  $OB$ ) que fait le prolongement de  $AI$  avec  $IC$  :

1° Le système étant lancé dans des conditions initiales quelconques, trouver les équations du mouvement. Montrer qu'on peut avoir  $\varphi$  et  $\psi$  en fonction de  $t$  par des quadratures;

2° Calculer la tension du fil  $AB$ ;

3° On abandonne le système sans vitesse initiale à partir d'une position quelconque. Étudier le mouvement dans ce cas;

4° On suppose les conditions précédentes, mais  $\varphi_0$  étant infiniment petit principal. Trouver les parties principales de  $\varphi$  et  $\psi$ . Calculer la valeur de la tension, au troisième ordre près.

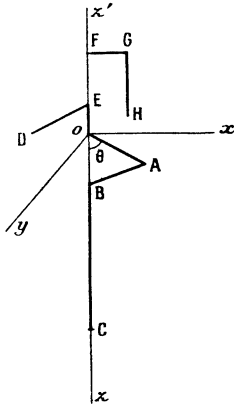
ÉPREUVE PRATIQUE. — Une sphère homogène, creuse, d'épaisseur négligeable, de masse  $100^g$ , de rayon  $10^{cm}$ , est attachée à un fil de  $90^{cm}$  de long et de masse négligeable. Quand la sphère se déplace dans l'air, elle éprouve une résistance qu'on suppose réduite à une force unique appliquée en son centre, en sens inverse de la vitesse  $v$  de celui-ci, et égale, en unités C.G.S., à  $\frac{Sv^2}{10000}$ , en appelant  $S$  la surface totale de la sphère :

1° On écarte la sphère de sa position d'équilibre d'un angle  $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$  et on l'abandonne sans vitesse initiale. Former l'équation qui donne l'angle  $\theta_1$  dont remonte la sphère au bout de la première oscillation simple. Prouver que  $\theta_1 < \theta_0$ ;

2° On suppose  $\theta_0$  infiniment petit principal. Calculer la partie principale de la différence  $\theta_0 - \theta_1$ . En supposant l'écart initial du point le plus bas de la sphère égal à  $10^{cm}$ , calculer approximativement l'écart suivant.

(Juillet 1911.)

EPREUVE THÉORIQUE. — Dans le système indiqué par la figure, DEOABC est un ensemble de tiges rectilignes homogènes, d'épaisseur négligeable et de densité linéaire égale à 1. Leurs dimensions sont indiquées ci-contre. Les tiges DE et EO sont solidaires l'une de l'autre; elles peuvent tourner autour de l'axe vertical  $z'Oz$  ( $Oz$  vers le



bas), qui traverse la tige OE, supposée creuse; OA est articulée en O avec EO suivant un axe horizontal invariablement lié à DEO. En A et B, on a des articulations parallèles à la précédente. Enfin, BE est assujettie à glisser le long de  $Oz$  et peut, en outre, pivoter sur elle-même :

1° On amène B en O; on imprime à DE une vitesse angulaire  $\omega$  au moment précis où l'on abandonne BC. Trouver le mouvement du système. Valeurs de  $\omega$  pour lesquelles A traverse  $Oz$ ;

2° On lance encore DE avec une vitesse angulaire  $\omega$  infiniment petite; mais la position initiale de A est infiniment voisine de  $Oz$ . Montrer que A reste voisin de  $Oz$ . Équations des petits mouvements;

3° On introduit maintenant la tige coudée FGH, qui peut tourner autour de  $Oz$ , indépendamment du système (S) précédent; FG est horizontale et GH verticale; en outre, elles ont encore une densité linéaire égale à 1. Ceci étant, on place FGH dans un azimut quelconque. Puis on

lance (S) comme dans (1°). Au bout d'un certain temps, ED rencontre GH. Il se produit une percussion, pendant laquelle on suppose que les deux tiges restent en contact. Calculer les vitesses après le choc;

4° Étudier brièvement le mouvement après le choc. Quand les deux tiges se séparent-elles? Montrer que la vitesse angulaire, pour une valeur donnée de  $\theta$  et pour le mouvement actuel, est, avec la vitesse correspondante du mouvement de (1°), dans un rapport plus petit que 1 et qui ne dépend que de  $\theta$ . Prouver que B ne revient jamais en O.

N.-B. — On fera abstraction des frottements.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Un fil élastique, dont la longueur naturelle est  $2l$ , est coupé en deux parties égales. On fixe chacune de celles-ci, par une extrémité, à une petite sphère M, pesant  $10^5$  et assimilable à un point matériel. Les deux autres bouts sont attachés à deux clous A et B fixés dans une planche mobile et distants de  $1^m$ . Enfin, la tension de chaque fil est  $k \cdot \Delta r$ ,  $\Delta r$  désignant l'allongement du fil à partir de  $l$  :

1° On place AB verticalement, A en haut; M prend une position d'équilibre située à  $60^{\text{cm}}$  au-dessous de A. En déduire le coefficient  $k$ ;

2° On place AB horizontalement; M prend une position d'équilibre située à  $20^{\text{cm}}$  au-dessous de AB. En déduire  $l$ ;

3° On place AB comme dans (1°) et l'on abandonne M sans vitesse initiale à partir d'une position  $M_1$  située à  $40^{\text{cm}}$  au-dessous de A. La sphère tombe jusqu'en  $M_2$ . Calculer  $AM_2$  et la durée de la chute;

4° On place AB horizontalement et l'on abandonne M sans vitesse initiale à partir du milieu de AB. Calculer la hauteur dont tombe la sphère.

N.-B. — Les distances seront calculées à  $1^{\text{cm}}$  près et les temps à 1<sup>e</sup> près. (Novembre 1911.)