Nouvelles annales de mathématiques

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 424-425

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__424_0>

CORRESPONDANCE.

M. **M.-F. Egan**. — M. Haag a donné récemment dans les *Nouvelles Annales* la formule sommatoire suivante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{(n+a_1)(n+a_2)\ldots(n+a_p)}$$
$$= -\sum_{i=1}^{p} A_i\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{a_i}\right),$$

les a_i étant des entiers positifs, tous différents, et $P(n)$ un polynome en n dont le degré ne dépasse pas $p-2$. Les A_i sont les coefficients de décomposition en fractions partielles; ainsi

$$R(x) = \frac{P(x)}{(x+a_1)\ldots(x+a_p)} = \sum \frac{A_i}{x+a_i}.$$

La démonstration de M. Haag s'appuie sur le théorème d'Abel. Voici une démonstration plus élémentaire, qui donne en même temps la somme d'un nombre fini de termes de la série. Rappelons que

$$\sum_i A_i = 0.$$

Si l'on retranche du second membre de l'identité

$$\sum_{n=1}^{m} R(n) = \sum_i A_i\left(\frac{1}{a_{i+1}} + \frac{1}{a_{i+2}} + \ldots + \frac{1}{a_{i+m}}\right).$$

la quantité nulle

$$\sum_i A_i\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}\right),$$

(1) Numéro d'avril 1912.

on trouve

$$\sum_{n=1}^{m} R(n) = \sum_i A_i \left(\frac{1}{m+1} + \ldots + \frac{1}{m+a_i} \right) - \sum_i A_i \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{a_i} \right).$$

Voilà la somme des m premiers termes de la série $\Sigma R(n)$. En faisant tendre m vers l'infini, on trouve la formule de M. Haag.