NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 40-48

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__40_2>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1912, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Besançon.

QUESTION DE COURS. — *Étude du maximum et du minimum d'une fonction d'une, de plusieurs variables indépendantes.*

Maximum et minimum relatifs.

Maximum et minimum dans le cas d'une fonction implicite.

Application : maximum et minimum du carré de la distance d'un point à une surface $z = f(x, y)$.

Méthode de Fermat. Application.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Lignes asymptotiques du conoïde*

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Déterminer φ de façon que l'une d'elles ait pour équation

$$a^2(x^4 + y^4) = (y^2 - x^2)^2(y^2 + x^2).$$

Déterminer la fonction de variable complexe $z = P + iQ$ satisfaisant à $2xyP + \varphi(y^2 - x^2) + 2xy(x^2 + y^2)^2 = 0$.

(Juin 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} - a}$$

dans laquelle a est un nombre positif donné.

Démontrer que les surfaces intégrales sont des surfaces réglées.

2° *Déterminer celle des surfaces intégrales qui contient la courbe qui a pour équations*

$$x = 2z, \qquad x^2 + y^2 = 4a^2.$$

Exprimer les coordonnées d'un point quelconque x, y, z, de cette surface S en question en fonction des deux paramètres u, v obtenus en posant

$$x = u\cos v, \qquad y = u\sin v.$$

3° *Déterminer les lignes asymptotiques de cette surface* S.

4° *Déterminer les trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes de cette surface* S.

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$2yy' = x(y'^2 + 1) + y'^4 - 3y'^2;$$

Il existe en particulier une intégrale passant par le point $x = 0$, $y = -1$, *et admettant pour tangente en ce point une droite de coefficient angulaire* $y' = 0$. *construire cette courbe.* (Juillet 1911.)

Bordeaux.

Première question. — *Considérant la surface* Σ *enveloppe de la sphère variable*

$$(x - a)^2 + [y - f(a)]^2 + z^2 = 1.$$

1° *Trouver géométriquement une première famille de lignes de courbure de cette surface;*

2° *Démontrer que la deuxième famille est formée de courbes planes qui se projettent sur le plan des xy suivant une famille de courbes parallèles;*

3° *Déterminer géométriquement les centres de courbure principaux pour un point quelconque de* Σ.

Deuxième question. — *En désignant par* P *et* Q *deux fonctions données des deux variables indépendantes* x *et* y *et en posant*

$$u = y^2 - x,$$

trouver à quelles conditions doivent satisfaire les deux fonctions P *et* Q *pour que la différentielle*

$$P\,dx + Q\,dy$$

admette un facteur intégrant qui soit fonction de u seulement. Montrer que si cette condition est remplie ce facteur intégrant s'obtient par quadrature.

Appliquer à l'intégration de

$$P\,dx + Q\,dy = 0$$

en supposant

$$P = (2y^2 - 2x - 1)e^2 + (2y^2 - 3x)e^y,$$
$$Q = 2y\,e^2 + 2x(y^2 + y - x)e^y.$$

Épreuve pratique. — *Étant donnés trois axes rectangulaires, soient* C *une surface conique ayant pour équation*

$$2xy - z^2 = 0$$

et T *une surface cylindrique ayant pour équation*

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$$

où les radicaux ont les déterminations positives.

On considère le solide A *d'étendue finie complètement limité par une portion de* C *et une portion de* T. *Calculer :*

1° *Le volume de* A;

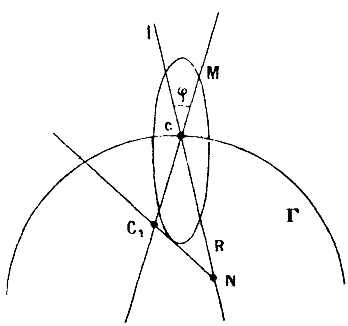
2° *L'aire de la portion de surface conique qui le limite ;*

3° *L'aire de la portion de surface cylindrique qui le limite.*

SOLUTION.

1° La surface Σ est une surface canal. La caractéristique qui est un grand cercle de la sphère variable constitue une première famille de lignes de courbure.

2° L'angle d'une normale MC à la surface Σ, qui est aussi



normale à ce lieu des centres des sphères, avec la normale principale est donné par

$$\varphi = \varphi_0 + \int \frac{ds}{T};$$

comme le lieu φ centre est une courbe plane Γ

$$y = f(n),$$

$$\frac{1}{T} = 0$$

et

$$\varphi = \varphi_0.$$

Par suite la deuxième famille de lignes de courbure est formée de courbes planes qui se projettent sur le plan des xy suivant des courbes parallèles à Γ;

3° En un point M de Σ le premier centre de courbure est C; l'autre est donné par l'intersection de MC avec la droite polaire de Γ qui est ici perpendiculaire au plan de Γ menée par le centre de courbure R correspondant à C.

(Juin 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° *Désignant par $f(x, y, z)$ une fonction donnée de trois variables indépendantes x, y et z, on demande de déterminer la forme la plus générale que peut avoir une fonction $\varphi(x, y, z)$ des mêmes variables pour que la différentielle totale*

$$(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \varphi(x, y, z)\,dz$$

soit complètement intégrable? Montrer que, dans ce cas, la différentielle précédente peut être ramenée sans aucune quadrature, à une différentielle totale à deux variables seulement, convenablement choisies.

2° *Montrer que toute différentielle totale à trois variables indépendantes peut être ramenée, en la multipliant par un facteur convenable, à la forme* (1).

Quel procédé d'intégration peut-on déduire de ce qui précède pour les différentielles complètement intégrables à trois variables indépendantes?

II. *Sur la surface dont l'équation en coordonnées rectangulaires est*

$$z = X - \frac{y^2}{4X},$$

X *étant une fonction donnée de x:*

1° *Déterminer les courbes* C *conjuguées des sections de la surface par les plans parallèles au plan* zOy;

2° *Déterminer les trajectoires orthogonales des projections des courbes* C *sur le plan* zOy.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer, en employant le théorème des résidus, l'intégrale*

$$\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos x}{(13-5\cos x)^2}\,dx.$$

(Novembre 1910.)

Caen.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Intégrer l'équation aux dérivées partielles linéaire*

$$2y(2a-x)\frac{\partial z}{\partial x} + (x^2+z^2-y^2-4ax)\frac{\partial z}{\partial y} + 2yz = 0,$$

où z *désigne une fonction inconnue des deux variables indépendantes* x *et* y, *et* a *une constante positive donnée.*

En supposant que x, y, z *désignent les coordonnées rectangulaires d'un point variable, faire voir que l'une quelconque des surfaces définies par l'intégrale générale est engendrée par un cercle; calculer, en un point quelconque du cercle générateur, le cosinus de l'angle du plan tangent à la surface avec le plan du cercle, et interpréter géométriquement le résultat obtenu.*

Particulariser la fonction arbitraire qui entre dans l'intégrale de manière que la surface correspondante contienne la courbe

$$x = 0,$$
$$z(y^2+z^2) = 8a^3.$$

II. *Étant donnés trois axes rectangulaires* OX, OY, OZ. *on considère un cône de révolution autour de* OZ, *ayant son sommet à l'origine* O, *et dont les génératrices font un angle* α *avec* OZ. *On considère d'autre part, sur la partie positive de* OX, *un point fixe* A, *à une distance donnée* a *de l'origine; on mène par le point* A *dans le plan* XOY *une droite faisant l'angle α avec* OX, *et par cette droite un plan parallèle à* OZ. *Soit* L *la ligne d'intersection de ce plan et du cône.*

Former l'équation de la surface engendrée par la ligne L *quand on fait varier l'angle α, faire voir que cette surface est réglée, et chercher les trajectoires orthogonales de ses génératrices rectilignes.*

Epreuve pratique. — *Construire en coordonnées rectangulaires l'une des courbes définies par l'équation différentielle*

$$dx = \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy.$$

Évaluer l'aire comprise entre la courbe et l'axe des x.

(Juin 1910.)

Epreuve écrite. — I. *Déterminer une surface par la double condition :*

1° *Que les coordonnées rectangulaires* x, y, z *d'un point variable de cette surface vérifient l'équation aux dérivées partielles*

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{3a^2}{z^2},$$

où a *désigne une longueur constante donnée;*

2° *Que la surface contienne la parabole*

$$x = 0,$$
$$z^2 = 2ay\sqrt{2}.$$

II. *Étant donnés trois axes rectangulaires* OX, OY, OZ, *on considère la surface réglée représentée par les formules*

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta,$$
$$z = f(\theta),$$

où r, θ *désignent deux paramètres arbitraires, et* $f(\theta)$ *une fonction donnée de* θ.

Déterminer sur la surface une ligne telle qu'en un quel-

conque de ses points la génératrice coupe sous un angle constant donné α l'une des deux lignes de courbure.

Construire la projection de cette ligne sur le plan XOY *dans l'hypothèse particulière*

$$\alpha = \frac{\pi}{6},$$
$$f(\theta) = a\cos\theta,$$

où a désigne une longueur constante donnée.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer le système des équations différentielles linéaires*

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= \quad u + v - w + 2\cos x - \sin x,\\
\frac{dv}{dx} &= -2u + 3v - w - 7\cos x - \sin x,\\
\frac{\partial w}{\partial x} &= -3u + 2w \qquad - 4\cos x + \sin x.
\end{aligned}$$

(Juin 1911.)

Dijon.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Soient trois axes de coordonnées rectangulaires* $Oxyz$. *Trouver une surface* S *telle que le plan tangent en un point quelconque* M *de cette surface contienne le symétrique par rapport à* O *du point de rencontre de la normale en* M *à* S *avec le plan* Oxy. *On supposera l'équation de* S *sous la forme* $z = f(x, y)$, *et l'on formera l'équation* A *que doit vérifier* f;

2° *Les cylindres paraboliques ayant pour section droite une parabole de foyer* O *et de directrice parallèle à* Oz, *sont des surfaces* S :

3° *Indiquer une intégrale complète de l'équation* A ;

4° *Intégrer le système différentiel des caractéristiques de l'équation* A.

Épreuve pratique. — *Évaluer, à 0,001 près, l'intégrale*

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{30x^2 - x - 24}{x^3(x^2 - 3x + 4)^2}\, dx.$$

(Novembre 1910.)