NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAURICE FRÉCHET

Sur la notion de différentielle totale

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 385-403

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__385_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1912, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

[C1a]

SUR LA NOTION DE DIFFÉRENTIELLE TOTALE;

Par M. Maurice FRÉCHET,
Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers.

INTRODUCTION

1. En cherchant à préciser dans le Calcul fonctionnel la notion de différentielle, j'ai été amené à examiner de près la définition de la différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables. Je me suis alors aperçu que non seulement la définition ordinairement adoptée (1) n'est pas propre à la généralisation que j'avais en vue, mais encore qu'elle n'est pas en soi satisfaisante.

On dit généralement (2) qu'une fonction de plusieurs variables indépendantes $f(x, y, \ldots, u)$ possède

(1) Dans la suite, je renverrai par des chiffres romains aux ouvrages suivants:

I. Baire, *Leçons sur les théories générales de l'Analyse*, t. I, Paris, 1907.
II. Goursat, *Cours d'Analyse*, t. I, Paris, 1910, 2e édition.
III. Humbert, *Cours d'Analyse*, t. I, Paris, 1903.
IV. De la Vallée Poussin, *Cours d'Analyse*, 2e édition, Paris, 1909.
V. J. Pierpont, *Theory of functions of real variables*, t. I, Boston, 1905.
VI. Stolz, *Grundzüge der Differential und Integral-Rechnung*, t. I, Leipzig, 1893.
VII. W.-H. Young, *The fondamental theorems of Differential Calculus*, Cambridge, 1910.
VIII. Tannery, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, 2e édition, Paris, 1904.

(2) I. p. 71; IV, p. 117.

une différentielle totale au point $x_0, y_0, \ldots, u_0$, si cette fonction admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_0}$, $\frac{\partial f}{\partial y_0}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial u_0}$, par rapport à chacune de ses variables; et alors cette différentielle est par définition

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_0}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y_0}\Delta y + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_0}\Delta u,$$

où $\Delta x, \Delta y, \ldots, \Delta u$ sont des accroissements arbitraires des variables $x, y, \ldots, u$.

2. Si maintenant on examine les théorèmes où intervient l'existence de la différentielle, on observe que les énoncés généralement adoptés pour le cas de plusieurs variables contiennent des hypothèses restrictives qui ne figurent pas dans les énoncés relatifs aux cas d'une variable. Donnons les exemples suivants :

Une fonction $f(x)$ qui est différentiable pour $x = x_0$, est nécessairement continue pour $x = x_0$.	Si une fonction $f(x, y)$ est dérivable par rapport à x et à y au point x_0, y_0 *et en son voisinage* et si de plus ses dérivées partielles *sont bornées* dans ce voisinage, la fonction $f(x, y)$ est nécessairement continue au point x_0, y_0 (et en son voisinage) par rapport à l'ensemble des variables (x, y) (I, p. 69; VIII, p. 364).
Si une fonction $u(x)$ admet une différentielle pour $x = x_0$ et si une fonction $f(u)$ admet une différentielle en u pour $u = u(x_0)$, la fonction $f[u(x)]$ admet une différentielle en x pour $x = x_0$	Si des fonctions $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ sont différentiables au point (x_0, y_0) et si une fonction $f(u, v, w)$ est différentiable au point $u(x_0, y_0)$, $v(x_0, y_0)$, $w(x_0, y_0)$, en u, v, w ; *si en outre* les dérivées partielles par rapport à u, v et w existent au voisinage de ce même

et cette différentielle s'obtient en remplaçant, dans la différentielle de $f(x)$, l'accroissement de u par sa différentielle.

point et sont continues en ce point, la fonction

$$f[u(x, y), v(x, y), w(x, y)]$$

est différentiable par rapport à x et à y au point x_0, y_0 et sa différentielle s'obtient en remplaçant dans la différentielle de $f(u, v, w)$, les accroissements de u, v, w par leurs différentielles (VIII, p. 369).

Si une fonction $f(x)$ admet une différentielle au point x_0 la courbe $y = f(x)$ a en ce point une tangente non parallèle à oy dont le coefficient angulaire est le coefficient de Δx dans la différentielle de f.

Si une fonction $f(x, y)$ est continue *et admet une différentielle continue* au point x_0, y_0 *et en son voisinage*, la surface $s = f(x, y)$ admet au point $[x_0, y_0]$, $[f(x_0, y_0)]$ un plan tangent non parallèle à oz, dont les coefficients angulaires sont les coefficients de Δx, Δy, dans la différentielle de s au point (x_0, y_0).

3. Or on ne peut se servir de la notion de différentielle sans avoir à utiliser l'une des propriétés précédentes. *De sorte que pratiquement la définition que l'on emploie véritablement, ce n'est pas la définition théorique précédemment rappelée, mais celle-ci :* une fonction $f(x, y, \ldots, u)$ admet une différentielle au point $(x_0, y_0, \ldots, u_0)$ si elle est continue, si elle admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial u}$ au point $(x_0, y_0, \ldots, u_0)$ et au voisinage de ce point, et si ces dérivées partielles sont continues au point $x_0, \ldots, u_0$; et alors cette différentielle est

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_0}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y_0}\Delta y + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_0}\Delta u.$$

Ainsi la simplicité de la définition théorique rappelée plus haut n'est qu'un trompe-l'œil. Mieux vaudrait adopter franchement la définition pratique que nous venons de formuler ([1]); moyennant une telle définition, on rétablirait l'analogie entre les énoncés relatifs au cas d'une variable et ceux qui concernent le cas de plusieurs variables.

Mais après avoir reconnu que la définition théorique est trop large, nous devons observer que la définition pratique, telle qu'elle résulte des Ouvrages classiques, est trop étroite et inutilement compliquée comme nous le montrerons dans la suite.

On est donc amené à chercher une définition de la différentielle qui se place pour ainsi dire entre les deux précédentes. J'étais ainsi arrivé à formuler une définition que je croyais nouvelle ([2]). Mais je me suis aperçu qu'on trouve déjà cette définition dans Stolz, *Grundzüge der Differential und Integral-Rechnung*, t. I, p. 133, et James Pierpont, *The theory of functions of real variables*, t. I, p. 268. Mais c'est W.-H. Young qui en a véritablement montré le premier tous les avantages dans son petit Livre : *The fundamental theorems of Differential Calculus* et dans quelques Mémoires. Après lui, le travail actuel pourrait paraître superflu. J'ai cru cependant utile de le publier parce que la simplification apportée dans les principes fondamentaux du Calcul différentiel me paraît assez grande pour qu'on puisse désirer au point de vue pédagogique que les conséquences de la nouvelle définition fussent exposées en français. J'ai donné en outre à la définition de Stolz une forme analytique *équivalente* à la sienne et d'ailleurs à peine différente, mais qui a l'avantage

---

([1]) En fait, c'est peut-être ce qui convient le mieux à une exposition élémentaire; *voir* IV, p. 28, III, p. 56.

([2]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CLII, 1911, p. 843, 1050.

d'être plus rapprochée de la définition historique par les infiniment petits et de se prêter en outre immédiatement à l'extension au Calcul fonctionnel qui était mon but principal. De plus, j'ai indiqué une proposition sur les relations entre la différentielle seconde et la différence seconde qui n'avait pas été, je crois, obtenue jusqu'ici rigoureusement.

J'ajoute, et ce sera avec le précédent le seul point véritablement nouveau de ce travail, qu'on serait conduit à la même définition de la différentielle première que celle de Stolz, si l'on partait d'une définition descriptive basée sur l'interprétation géométrique de la différentielle. Ce n'est pas celle que je prendrai comme point de départ. Néanmoins, il me semble que si l'exposé de W.-H. Young a déjà fait ressortir la commodité de la définition de Stolz, la définition géométrique à laquelle je fais allusion lui confère en outre en quelque sorte un caractère de nécessité. C'est la suivante.

Définition. — Une fonction $f(x, y)$ admet une différentielle à mon sens au point (x_0, y_0) si la surface $z = f(x, y)$ admet au point (x_0, y_0) un plan tangent non parallèle à Oz

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0).$$

La différentielle de $f(x, y)$ en (x_0, y_0) est alors

$$d f(x, y) = p\,\Delta x + q\,\Delta y,$$

où Δx, Δy sont des accroissements arbitraires de x, y.

NOUVELLE DÉFINITION ANALYTIQUE DE LA DIFFÉRENTIELLE.

4. On a abandonné depuis longtemps la définition de la différentielle au moyen des infiniment petits, telle qu'elle paraît résulter naturellement de ce théorème :

La différentielle d'une fonction $f(x)$ au point x_0 est la partie principale de l'accroissement de $f(x)$ à partir du point x_0. Cette définition est évidemment insuffisante (on sait par exemple que si $f'_{x_0} = 0$ et si $f''_{x_0^2} \lesseqgtr 0$, la partie principale de l'accroissement de f est la différentielle seconde).

Il y a lieu de le regretter, parce que c'est la définition qui s'est trouvée historiquement et pratiquement la plus intuitive et la plus utile.

Or on peut, en restant rigoureux, retrouver une partie des avantages de la définition précédente en la modifiant ainsi :

Une fonction $f(x)$ est différentiable au point x_0, s'il existe une fonction linéaire $A\,\Delta x$ de l'accroissement de la variable qui ne diffère de l'accroissement de la fonction f à partir de x_0 que d'une quantité infiniment petite par rapport à l'accroissement Δx de la variable. Et $A\,\Delta x$ est appelée la différentielle de $f(x)$ en x_0.

La condition imposée à $A\,\Delta x$ signifie que la quantité

$$\frac{[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]-A\,\Delta x}{\Delta x}$$

tend vers zéro en même temps que Δx. Et l'on voit ainsi que cette définition est exactement équivalente à la définition rigoureuse ordinaire.

Il pourrait y avoir des avantages pédagogiques à adopter cette forme de définition qui met bien en évidence le fait que la différentielle est une fonction linéaire approchée de l'accroissement de la fonction. Mais c'est pour le cas de plusieurs variables qu'elle possède une supériorité marquée sur la définition ordinaire à laquelle elle ne reste plus équivalente.

5. *Définition.* — Une fonction de plusieurs

variables $f(x, y, \ldots, u)$ admet une différentielle à mon sens au point $(x_0, y_0, \ldots, u_0)$ s'il existe une fonction linéaire des accroissements des variables, soit

$$df = \mathrm{A}\,\Delta x + \mathrm{B}\,\Delta y + \ldots + \mathrm{L}\,\Delta u$$

qui ne diffère de l'accroissement de la fonction f à partir du point $(x_0, y_0, \ldots, u_0)$ que d'une quantité infiniment petite par rapport à l'ensemble des accroissement $\Delta x, \ldots, \Delta u$ des variables. Et l'expression $\mathrm{A}\Delta x + \ldots + \mathrm{L}\Delta u$ est appelée la différentielle de $f(x, \ldots, u)$ au point considéré.

J'ai laissé, dans ce texte, l'expression un peu vague *infiniment petite par rapport à l'ensemble des accroissements*, parce qu'on peut la préciser de plusieurs façons équivalentes. Dans le cas de trois variables, par exemple, on aurait pu dire *infiniment petite par rapport au vecteur* $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, c'est-à-dire par rapport à

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

D'une façon générale, la condition imposée à df signifie que

$$\frac{[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, \ldots, u_0 + \Delta u) - f(x_0, y_0, \ldots, u_0)] - (\mathrm{A}\,\Delta x + \mathrm{B}\,\Delta y + \ldots + \mathrm{L}\,\Delta u)}{\Delta}$$

tend vers zéro avec Δ, Δ désignant l'*écart* des points $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, \ldots, z_0 + \Delta z)$ et $(x_0, y_0, \ldots, u_0)$. On peut prendre pour Δ l'une des expressions

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \ldots + \Delta u^2},$$

ou $|\Delta x| + |\Delta y| + \ldots + |\Delta u|$; ou encore, on peut prendre pour Δ la plus grande, δ, des quantités $|\Delta x|$, $|\Delta y|$, $\ldots$, $|\Delta u|$. Ces trois choix sont équivalents à notre point de vue actuel, comme on le voit immédiatement d'après les inégalités

$$\delta \leqq \sqrt{\Delta x^2 + \ldots + \Delta u^2} \leqq \sqrt{n}\,\delta,$$
$$\delta \leqq |\Delta x| + \ldots + |\Delta u| \leqq n\,\delta,$$

qui montrent que les trois expressions considérées sont des infiniment petits du même ordre.

Dans une exposition simplifiée il y aurait lieu de se borner à prendre $\Delta = |\Delta x| + \ldots + |\Delta u|$, comme nous le ferons dans la suite; mais j'ai indiqué cet arbitraire parce qu'il correspond à des définitions différentes dans le Calcul fonctionnel.

Il est important de remarquer que si tous les accroissements sont nuls sauf, par exemple, Δx, les trois expressions se réduisent à $|\Delta x|$.

On peut faire maintenant une remarque essentielle :

Si une fonction $f(x, y, \ldots, u)$ admet une différentielle à mon sens, elle a aussi une différentielle au sens ordinaire (et c'est la même).

En effet, si l'on applique la définition en faisant

$$\Delta y = \ldots = \Delta u = 0,$$

on voit que la quantité

$$\frac{[f(x_0 + \Delta x, y_0, \ldots, u_0) - f(x_0, y_0, \ldots, u_0)]}{\Delta x} - A$$

tend vers zéro avec Δx. Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x_0}$ existe et est égal à A; de même pour $\dfrac{\partial f}{\partial y_0}$ qui sera égal à B, etc. *Mais la réciproque n'est pas vraie.*

Par exemple, la fonction $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ est partout continue et elle est dérivable en x et en y à l'origine où ses dérivées sont nulles [puisque $f(x, 0) \equiv f(0, y) \equiv 0$]. Si elle avait une différentielle à mon sens à l'origine, on aurait donc

$$\lim \frac{\sqrt{|\Delta x \, \Delta y|}}{|\Delta x| + |\Delta y|} = 0,$$

quand $|\Delta x| + |\Delta y|$ tend vers zéro, ce qui n'a pas lieu comme on le voit en prenant, par exemple, $\Delta y = \Delta x$.

6. On voit maintenant que la définition précédemment indiquée peut s'énoncer ainsi :

Une fonction $f(x, y, \ldots, u)$ est différentiable au point $(x_0, y_0, \ldots, u_0)$ si elle admet en ce point des dérivées partielles finies $\frac{\partial f}{\partial x_0}, \frac{\partial f}{\partial y_0}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial u_0}$, et *si ces dérivées partielles sont telles que l'on ait*

$$
\begin{aligned}
(1)\quad & f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, \ldots, u_0 + \Delta u_0) \\
& = f(x_0, y_0, \ldots, u_0) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x_0} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y_0} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_0} \Delta u_0 \\
& \quad + \varepsilon \big\{ |\Delta x| + |\Delta y| + \ldots + |\Delta z| \big\},
\end{aligned}
$$

où ε est une quantité qui tend vers zéro quand

$$|\Delta x| + |\Delta y| + \ldots + |\Delta u|$$

tend vers zéro.

C'est la définition même de Stolz, Pierpont et Young, à cela près que ces auteurs remplacent le dernier terme par

$$\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 xy + \ldots + \varepsilon_n \Delta u$$

(où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_u$ tendent vers zéro quand $\Delta x, \Delta y, \ldots, \Delta u$ tendent simultanément vers zéro) ce qui revient au même. Je dirai donc, à partir de maintenant, *différentielle au sens de Stolz* au lieu de *différentielle à mon sens*.

On observera que la définition de Stolz ajoute à la définition ordinaire l'hypothèse que la formule (1) est vérifiée. Un cas très général où il en est ainsi est le suivant :

Si une fonction $f(x, y)$ est dérivable par rapport à x et par rapport à y au point (x_0, y_0) et par rapport à l'une des variables en son voisinage et si la fonction et cette dérivée sont continues au point (x_0, y_0) par rapport à l'ensemble des deux variables, la fonction $f(x, y)$ admet une différentielle au sens de Stolz au point (x_0, y_0) (VI, 134). Mais la réciproque n'est pas vraie. *Non seulement pour qu'une fonction ait une différentielle au sens de Stolz au point (x_0, y_0), il n'est pas nécessaire que ses dérivées partielles soient continues en ce point, mais il n'est même pas nécessaire qu'elles existent au voisinage de ce point.*

Si l'on considère d'abord la fonction

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \text{pour} \qquad x^2 + y^2 \lesseqgtr 0$$

avec $f(0, 0) = 0$; on voit que cette fonction est partout dérivable.

Mais on a, par exemple,

$$f(x, 0) = x^2 \sin \frac{1}{|x|}, \qquad f(0.0) = 0.$$

De sorte que

$$f'_x(0, 0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f'_x(x.0) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

pour $x > 0$; et par suite

$$\lim f'_x(x, 0) = -1 \pm f'_x(0, 0)$$

quand on prend $x = \frac{1}{2n\pi}$ et que n croît indéfiniment.

Ainsi les dérivées existent, mais ne sont pas continues. Pourtant on a

$$\lim \frac{(\Delta x^2 + \Delta y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}}{|\Delta x| + |\Delta y|} = 0,$$

quand $|\Delta x| + |\Delta y|$ tend vers zéro, c'est-à-dire que cette fonction admet à l'origine une différentielle au sens de Stolz (cette différentielle étant d'ailleurs nulle).

Soit ensuite $\varphi(x)$ la fonction de Weierstrass qui est partout continue et qui n'est nulle part dérivable. Envisageons la fonction

$$f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}[\varphi(\sqrt{x^2+y^2}) - \varphi(0)].$$

Elle est dérivable par rapport à x et à y, à l'origine (et ses dérivées y sont nulles). Au contraire, il est facile de voir qu'en un point quelconque non situé sur les axes, la fonction n'est dérivable ni par rapport à x ni par rapport à y. En sorte qu'il est impossible de déterminer autour de l'origine, une région si petite qu'elle soit, dans laquelle $f(x, y)$ soit partout dérivable.

Cependant la fonction admet une différentielle au sens de Stolz à l'origine. On a évidemment

$$\lim \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}[\varphi(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}) - \varphi(0)]}{|\Delta x| + |\Delta y|} = 0,$$

quand $|\Delta x| + |\Delta y|$ tend vers zéro.

Si une fonction est différentiable au sens de Stolz en tout point d'un domaine D, elle a nécessairement des dérivées partielles en tout point de ce domaine. Mais ces dérivées ne sont pas nécessairement continues en tout point intérieur à D.

Tel est le cas de la fonction citée précédemment

$$(x^2+y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 y^2}}.$$

En résumé, on voit bien que la définition de la différentielle au sens de Stolz se place entre la définition théorique et la définition pratique mentionnées plus haut. Elle est moins large que la première, moins restrictive que la seconde.

THÉORÈMES FONDAMENTAUX DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

7. Nous allons montrer maintenant qu'au moyen de cette nouvelle définition, on peut simplifier les énoncés classiques donnés plus haut de façon à les modeler exactement sur ceux qu'on obtient dans le cas d'une variable. Nous nous bornerons généralement au cas de deux variables.

Théorème. — *Si une fonction $f(x, y)$ admet une différentielle au sens de Stolz au point (x_0, y_0), elle est en ce point continue par rapport à l'ensemble des deux variables x, y.*

En effet, d'après l'hypothèse, on a en appelant Δf l'accroissement de f

$$\Delta f = \mathrm{A}\,\Delta x + \mathrm{B}\,\Delta y + \varepsilon|\,\Delta x\,| + \varepsilon|\,\Delta y\,|,$$

ε tendant vers zéro avec $|\,\Delta x\,| + |\,\Delta y\,|$.

Ce théorème n'est pas vrai si l'on définit la différentielle au sens ordinaire, sans ajouter une hypothèse supplémentaire. Il suffit pour le voir de prendre par exemple [1] pour $f(x, y)$ la fonction égale à $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ quand $x^2+y^2 \pm 0$ et à zéro quand $x^2+y^2=0$. Elle a une différentielle, évidemment nulle à l'origine, et pourtant sa valeur $\frac{1}{2}$ pour $y = x \lesseqgtr 0$ ne tend pas vers $f(0, 0)$ quand x^2+y^2 tend vers zéro. Ce seul fait suffit à prouver que si une fonction a une différentielle au sens ordinaire, elle n'en a pas nécessairement au sens de Stolz.

8. Théorème. — *Si des fonctions $u(x, y)$, $v(x, y)$,*

(1) I, p. 69.

$w(x, y)$ admettent une différentielle au sens de Stolz au point x_0, y_0, et si une fonction $f(u, v, w)$ admet une différentielle au sens de Stolz au point $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$, $w_0 = w(x_0, y_0)$, la fonction $F(x, y) \equiv f[u(x, y), v(x, y), w(x, y)]$ *admet une différentielle au sens de Stolz au point (x_0, y_0) et sa différentielle s'obtient en remplaçant dans la différentielle de $f(u, v, w)$ les accroissements de u, v, w par leurs différentielles* (VI, p. 138).

Il s'agit de prouver que dF existe et est égal à

$$f'_{u_0}(u'_{x_0}\Delta x + u'_{y_0}\Delta y) + f'_{v_0}(v'_{x_0}\Delta x + v'_{y_0}\Delta y) \\ + f'_{w_0}(w'_{x_0}\Delta x + w'_{y_0}\Delta y),$$

c'est-à-dire que

$$dF = f'_{u_0}\,du + f'_{v_0}\,dv + f'_{w_0}\,dw.$$

Pour cela, il faut montrer que la quantité

$$P = \frac{F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) - (f'_{u_0}du + f'_{v_0}dv + f'_{w_0}dw)}{\Delta}$$

tend vers zéro avec $\Delta = |\Delta x| + |\Delta y|$.

Or par hypothèse l'accroissement de F peut s'écrire

$$\Delta F = \Delta f = f'_{u_0}\Delta u + f'_{v_0}\Delta v + f'_{w_0}\Delta w + \varepsilon|\Delta u| + \varepsilon|\Delta v| + \varepsilon|\Delta w|,$$

où ε tend vers zéro avec $(|\Delta u| + |\Delta v| + |\Delta w|)$. Donc

$$P = f'_{u_0}\left(\frac{\Delta u - du}{\Delta}\right) + f'_{v_0}\left(\frac{\Delta v - dv}{\Delta}\right) + f'_{w_0}\left(\frac{\Delta w - dv}{\Delta}\right) \\ + \varepsilon\frac{|\Delta u| + |\Delta v| + |\Delta w|}{\Delta}.$$

Les coefficients de $f'_{u_0}, f'_{v_0}, f'_{w_0}$ tendent vers zéro par hypothèse. Il suffit de montrer que le coefficient de ε

reste borné. Cela résulte de l'inégalité.

$$\left|\frac{\Delta u}{\Delta}\right| \leqq \left|\frac{\Delta u - du}{\Delta}\right| + \left|\frac{u'_{x_0}\,\Delta x + u'_{y_0}\,\Delta y}{|\Delta x| + |\Delta y|}\right|$$
$$\leqq \left|\frac{\Delta u - du}{\Delta}\right| + |u'_{x_0}| + |u'_{y_0}|.$$

Le théorème actuel n'est plus exact si l'on emploie la définition ordinaire de la différentielle sans ajouter d'hypothèses supplémentaires comme au n° 2. Prenons, par exemple, la fonction $f(u, v) = \sqrt{|u, v|}\, L(u^2 + v^2)$ pour $u^2 + v^2 \gtrless o$, et $f(o,o) = o$. Elle a des dérivées partielles en u, v même à l'origine où elles sont nulles. En appliquant le théorème précédent à la fonction $F(x) = f(x, x)$, on aurait $F'_x(o) = o$. Or $F(x) = x\, L\, 2x^2$ pour $x > o$, $F(o) = o$ et alors F'_x n'existe pas pour $x = o$.

On remarquera en outre combien la démonstration du théorème est plus naturelle que la démonstration classique [1] qui utilise un artifice de calcul.

9. Le théorème actuel met en évidence un autre avantage de la nouvelle définition par rapport à la définition ordinaire. C'est que *l'existence de la différentielle au sens de Stolz de la fonction $f(x, y, z)$ est indépendante des axes choisis pour Ox, Oy, Oz, tandis qu'elle ne l'est pas pour la définition ordinaire.* Si l'on opère en effet une subtitution linéaire sur x, y, z, et si la fonction avait primitivement une différentielle par rapport à x, y, z en un point x_0, y_0, z_0, la fonction obtenue aura une différentielle par rapport aux nouvelles variables au point correspondant.

Cela n'a pas lieu pour la définition classique. Si, par exemple, on envisage la fonction $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ pour $x^2 + y^2 \lesseqgtr o$

(1) *Voir* par exemple I, p. 69-70.

avec $f(o, o) = o$, cette fonction est partout continue et dérivable ; elle a donc partout la différentielle classique. Prenons pour axes les bissectrices, elle devient $f(x', y') = \frac{x'^2 - y'^2}{2\sqrt{x'^2 + y'^2}}$ et elle n'est plus dérivable à l'origine.

10. Théorème. — *Si une fonction $f(x, y)$ est uniformément continue dans le rectangle limité par les abscisses a, $a + h$ et les ordonnées b, $b + k$ et si elle admet une différentielle au sens de Stolz en tout point intérieur au sens strict à ce rectangle, il existe au moins un nombre θ tel que l'on ait*

$$(2) \quad f(a + h, b + k) - f(a, b) \\ = h f'_a(a + \theta h, b + \theta k) + k f'_b(a + \theta h, b + \theta k)$$

avec

$$o < \theta < 1.$$

La démonstration classique s'applique ici grâce au théorème précédent.

Mais si, en utilisant la définition ordinaire de la différentielle, on n'ajoute pas d'hypothèse supplémentaire à l'énoncé précédent, on n'a plus, comme nous l'avons vu au n° 9, le droit d'appliquer le théorème précédent. Nous donnerons aussi un exemple prouvant que non seulement la démonstration, mais aussi l'énoncé ne seraient plus exacts. Soit la fonction $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ pour $x^2 + y^2 \gtrless o$ avec $f(o, o) = o$. Elle est partout continue et dérivable en x et y. Cependant si on lui appliquait la formule (2) avec, par exemple, $a = b = -1$, $h = k = 3$ on obtiendrait :

$$f(a + h, b + h) - f(a, b) = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

D'autre part $a + \theta h = -1 + 3\theta = b + \theta k$. Si l'on avait $\theta = \frac{1}{3}$, c'est-à-dire $a + \theta h = b + \theta k = o$, les deux dérivées seraient nulles, on obtiendrait $\frac{1}{\sqrt{2}} = o$. Si $\theta \lesseqgtr \frac{1}{3}$, alors les deux dérivées seraient égales à $\frac{3}{2\sqrt{2}}$, on obtiendrait

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}}.$$

11. Théorème. — *Soit* (x_0, y_0, z_0) *un système de solutions de l'équation* $F(x, y, z) = 0$. *Si la fonction* $F(x, y, z)$ *est continue par rapport à l'ensemble des variables* x, y, z *au point* (x_0, y_0, z_0) *et en son voisinage et si elle admet au point* x_0, y_0, z_0 *une dérivée partielle par rapport à* z *différente de zéro, il existe une fonction* $z = f(x, y)$ *bien déterminée dans le voisinage de* x_0, y_0 *qui prend la valeur* z_0 *au point* x_0, y_0, *qui est continue en ce point et qui constitue dans le voisinage de ce point une solution de l'équation implicite* $F(x, y, z) = 0$. *De plus, si* $F(x, y, z)$ *admet une différentielle totale au sens de Stolz au point* x_0, y_0, z_0 *la solution précédente admet elle-même une différentielle totale au sens de Stolz au point* x_0, y_0, *cette différentielle étant donnée par la formule.*

$$df = -\frac{F'_{x_0}(x_0, y_0, z_0)}{F'_{z_0}(x_0, y_0, z_0)}\Delta x - \frac{F'_{y_0}(x_0, y_0, z_0)}{F'_{z_0}(x_0, y_0, z_0)}\Delta y.$$

Nous suivrons, pour la première partie de la démonstration, le raisonnement de Young (1, p. 38).

Par hypothèse $F'_{z_0} \lessgtr 0$. Supposons, par exemple, $F'_{z_0} > 0$. Puisque $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, $F(x_0, y_0, z)$ sera positif pour $z > z_0$, et négatif pour $z < z_0$, si $|z - z_0|$ est inférieur à un nombre η assez petit. Comme $F(x, y, z)$ est continue au voisinage de x_0, y_0, z_0, nous pouvons choisir ce nombre η de sorte que $F(x, y, z)$ soit en outre continue dans tout le domaine D défini par

$$|x - x_0| + |y - y_0| + |z - z_0| \leqq \eta.$$

Mais soient x_0, y_0, z_1, et x_0, y_0, z_2 deux points de ce domaine. En supposant $z_1 > z_0$, $z_2 < z_0$ on aura $F(x_0, y_0, z_1) > 0$, $F(x_0, y_0, z_2) < 0$ et l'on pourra trouver un cylindre C ayant pour axe la droite $x = x_0$, $y = y_0$ telle que $F(x, y, z)$ soit d'un signe constant sur les sections de ce cylindre par les plans $z = z_1$ et $z = z_2$. On voit alors que, sur toute parallèle à Oz contenue dans le cylindre C, $F(x, y, z)$ est une fonction continue de z qui est positive pour $z = z_1$, négative pour $z = z_2$, donc qui s'annule au moins une fois entre z_1 et z_2. Pour chaque point x, y de la base σ de ce cylindre dans le plan des x, y, il y a donc au ~~point~~ une racine de l'équation $F(x, y, z) = 0$ entre z_1 et z_2; désignons-la par $f(x, y)$. Pour $x = x_0$, $y = y_0$, $F(x, y, z)$ ne s'annule entre z_1 et z_2 que pour $z = z_0$. Donc $f(x_0, y_0) = z_0$. De plus si le point x, y tend vers le point x_0, y_0, $f(x, y)$ restant compris entre z_1 et z_2 a une limite supérieure z'_0 et une limite inférieure z''_0, comprises entre ces limites; et, puisque $F(x, y, z)$ est continue dans le cylindre C, on doit avoir

$$F(x_0, y_0, z'_0) = F(x_0, y_0, z''_0) = 0,$$

ce qui n'est possible que si $z'_0 = z''_0 = z_0$. Nous avons donc bien une fonction $z = f(x, y)$ vérifiant l'équation

$$F(x, y, z) = 0$$

dans le cylindre précédent, telle que $z_0 = f(x_0, y_0)$ et continue pour $x = x_0$, $y = y_0$.

Supposons en outre que $F(x, y, z)$ ait une différentielle totale au sens de Stolz au point x_0, y_0, z_0. On aura

$$\begin{aligned} F(x, y, z) = F(x_0, y_0, z_0) & \\ + (x - x_0)F'_{x_0} + (y - y_0)F'_{y_0} + (z - z_0)F'_{z_0} & \\ + \varepsilon \{ |x - x_0| + |y - y_0| + |z - z_0| \}, & \end{aligned}$$

où ε tend vers zéro quand le point x, y, z tend vers x_0, y_0, z_0.

On pourra choisir le nombre η de façon que $|\varepsilon|$ soit plus petit qu'un nombre fixe ω inférieur à $|F'_{z_0}(x_0, y_0, z_0)|$, quand x, y, z reste dans le domaine D défini plus haut. Alors on aura, pour $z = f(x, y)$,

$$\begin{aligned} 0 = (x - x_0)F'_{x_0} + (y - y_0)F'_{y_0} + [f(x, y) - z_0]F'_{z_0} \\ + \varepsilon \{ |x - x_0| + |y - y_0| + |f(x, y) - z_0| \}; \end{aligned}$$

d'où

$$(4) \quad \begin{aligned} |f(x,y) - z_0| &= \left| \frac{(x - x_0)(F'_{x_0} \pm \varepsilon) + (y - y_0)(F'_{y_0} \pm \varepsilon)}{F'_{z_0} \pm \varepsilon} \right| \\ &\leq \{ |x - x_0| + |y - y_0| \} \left[\frac{|F'_{x_0}| + |F'_{y_0}| + \omega}{|F'_{z_0}| - \omega} \right] \end{aligned}$$

et

$$(5) \quad \begin{aligned} &\frac{\left| f(x,y) - z_0 + \dfrac{F'_{x_0}}{F'_{z_0}}(x - x_0) + \dfrac{F'_{y_0}}{F'_{z_0}}(y - y_0) \right|}{|x - x_0| + |y - y_0|} \\ &= |\varepsilon| \left\{ 1 + \frac{|f(x,y) - z_0|}{|x - x_0| + |y - y_0|} \right\}. \end{aligned}$$

D'après (4), le second membre de la dernière égalité est au plus égal à

$$|\varepsilon| \left\{ 1 + \frac{|F'_{x_0}| + |F'_{y_0}| + \omega}{|F'_{z_0}| - \omega} \right\}.$$

Quand $|x - x_0| + |y - y_0|$ tend vers zéro, nous avons vu que $|f(x, y) - z_0|$ tend aussi vers zéro, donc ε tend vers zéro et par suite le premier membre de (5) tend vers zéro. C'est dire précisément que $f(x, y)$ admet au point x_0, y_0 une différentielle au sens de Stolz, et que cette différentielle est bien celle que nous avions annoncée.

12. *Remarque.* — Si $F(x, y, z)$ est différentiable au sens de Stolz, non seulement au point x_0, y_0, z_0, mais dans le voisinage de ce point, la solution précédente sera unique dans le voisinage de x_0, y_0, z_0 et elle y sera continue et différentiable au sens de Stolz.

Il suffit évidemment de montrer que la solution est unique. Or on pourra choisir η assez petit pour que, dans tout le domaine D, F'_z existe et soit d'un signe constant. Alors $F(x, y, z)$ ne pourrait s'annuler dans le domaine D pour les mêmes valeurs de x, y, mais pour deux valeurs distinctes de z, sans quoi F'_z s'annulerait dans D.

La démonstration classique (I, p. 99; II, p. 81-85; IV, p. 141; VIII, p. 371) suppose l'existence des dérivées de F au voisinage du point x_0, y_0, z_0 et la continuité de l'une d'elles dans ce même voisinage. Elle est donc moins générale que la précédente.

(*A suivre.*)