Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 378-383

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__378_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2172.

(1911, p. 94.)

Dans le plan ABC *on mène les droites* AD, BE, CF, *qui se coupent en un point* P. *Soit* Q *la conique circonscrite à* ABC *et tangente en* A, B, C *aux parallèles à* EF, FD, DE.

I. *Les parallèles à* PA, PB, PC, *menées par un point* O *de* Q, *coupent* BC, CA, AB *en* λ, μ, ν, *et l'on a la droite* $\Delta(\lambda, \mu, \nu)$.

II. *En permutant les points* O *et* P, *on a une seconde droite* $\Delta'(\lambda', \mu', \nu')$.

III. *Les droites* Δ *et* Δ' *se coupent au milieu* ω *de* OP. *Cas où* P *est l'orthocentre de* ABC. P. Sondat.

SOLUTION

Par M. Parrod.

Le cas où P est l'orthocentre de ABC a été proposé par M. Sondat et résolu dans les *Nouvelles Annales*, 1907, p. 332; dans ce cas la conique Q est le cercle circonscrit.

Le cas général s'en déduit par projection oblique sur un plan.

On peut aussi considérer le cylindre droit qui a pour base la figure donnée. Une section circulaire du cylindre ayant pour base la conique Q donne la figure particulière précédente, car le triangle $D_1E_1F_1$ dont la projection est DEF a ses côtés antiparallèles à ceux du triangle $A_1B_1C_1$; dans ce triangle, les droites A_1D_1, B_1E_1 et C_1F_1 sont les hauteurs.

Autre solution par M. R. BOUVAIST.

2174.

(1911, p. 95.)

Si un point O *décrit le cercle* ABC, *on sait que les parallèles à* OA, OB, OC, *menées par l'orthocentre* P *du triangle* ABC, *coupent* BC, CA, AB *en trois points en ligne droite.*

Démontrer que cette droite Δ *enveloppe la conique* Q *inscrite à* ABC *et concentrique au cercle d'Euler.*

Si Δ_1 *est la droite correspondant au point* O_1 *diamétralement opposé à* O, *le point* $O'(\Delta\Delta_1)$ *décrit la directrice* $\Delta'(\lambda', \mu', \nu')$ *de* Q, *relative à son foyer* P, *et qu'on obtient en menant les parallèles* $P\lambda'$, $P\mu'$, $P\nu'$, *aux tangentes en* A, B, C.

La corde II_1 *des contacts tourne autour de* P *en restant perpendiculaire à* PO'.   P. SONDAT.

SOLUTION

Par M. PARROD.

Soit $\lambda\mu\nu$ la droite Δ. L'angle $\mu P\nu$ est constant, donc cette droite enveloppe une conique inscrite dans le triangle ABC; l'un de ses foyers est P, l'autre foyer est le point inverse de P, c'est-à-dire le centre du cercle ABC; son cercle principal est le cercle pédal commun à ces deux points, c'est le cercle d'Euler; les symétriques du point P par rapport aux trois côtés du triangle ABC étant sur le cercle circonscrit, le cercle directeur du foyer P est le cercle ABC.

Soit $\lambda_1\mu_1\nu_1$ la droite Δ. L'angle $\lambda P\lambda_1$ est constant, donc la corde des contacts II_1 des tangentes Δ, Δ_1 passe par P et le point $O'(\Delta\Delta_1)$ est sur la directrice du foyer P et de plus cette corde est perpendiculaire sur PO'.

La droite $P\lambda'$ est perpendiculaire sur le diamètre du point A et le point de contact de Q avec BC est un point D tel que PD est parallèle à ce diamètre; la droite $P\lambda'$ étant perpendiculaire sur PD, le point λ' appartient à cette directrice. On démontrerait de même que μ' et ν' sont situés sur elle.

Autres solutions par MM. Bouvaist et Gisolf.

2175.

(1911, p. 95.)

Soient A', B', C' *trois points pris sur les côtés d'un triangle* ABC *de telles manières que les droites* AA', BB', CC' *soient concourantes; soient* α, β, γ *trois points pris sur les côtés du triangle* A'B'C *tels que les droites* $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ *soient concourantes. Démontrer que les droites* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ *sont concourantes.* Giraudon.

SOLUTION

Par M. R. Bouvaist.

Projetons l'axe d'homologie des triangles ABC, A'B'C' suivant la droite de l'infini, nous obtenons deux triangles $A_1B_1C_1$ et A'B'C' ayant leurs côtés parallèles; si α_1, β_1, γ_1 sont les projections de α, β, γ, nous avons

$$\frac{\alpha_1 C'_1}{\alpha_1 B'_1}\,\frac{\beta_1 B'_1}{\beta_1 A'_1}\,\frac{\gamma_1 A'_1}{\gamma_1 C'_1}=1,$$

les droites $A_1\alpha_1$, $B_1\beta_1$, $C_1\gamma_1$ rencontrent B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1 en α'_1, β'_1, γ'_1 et l'on a

$$\frac{\alpha_1 C'_1}{\alpha_1 B'_1}=\frac{\alpha'_1 C_1}{\alpha'_1 B_1};$$

de cette relation et des deux autres analogues on déduit la suivante

$$\frac{\alpha'_1 C_1}{\alpha'_1 B_1}\,\frac{\beta'_1 B_1}{\beta'_1 A_1}\,\frac{\gamma'_1 A_1}{\gamma'_1 C_1}=1,$$

qui montre que les droites $A_1\alpha_1$, $B_1\beta_1$, $C_1\gamma_1$ sont concourantes.

Autres solutions par MM. Abramescu, Gisolf, Klug, Lemaire et Parrod.

2176.

(1911, p. 95.)

On considère une parabole P *et une droite* D *perpendiculaire à l'axe de* P. *Soient* A, B, C *les pieds des normales à* P *abaissées d'un point quelconque* M *de* C; A_1, B_1, C_1 *les points de Frégier et* A_2, B_2, C_2 *les centres de courbure relatifs à* A, B, C. *On a entre les aires des trois triangles* ABC, $A_1B_1C_1$ *et* $A_2B_2C_2$ *les relations* $ABC = A_1B_1C_1$ *et* $\frac{ABC}{A_2B_2C_2} = \text{const.}$

E.-N. Barisien.

SOLUTION

Par M. R. Bouvaist.

Si A' est le symétrique du point A par rapport à l'axe de la parabole, le point de Frégier A_1 relatif à A est sur le diamètre A'A, et la longueur $A'A_1 = 2p$ (p étant le paramètre de la parabole donnée). Le lieu du point A_1 est, par suite, la parabole coaxiale et égale à la parabole donnée obtenue en faisant subir à cette dernière une translation, telle que la distance des deux sommets soit égale à $2p$. Ceci posé, il est évident que les triangles A', B', C' sont équivalents, et comme $A'B'C = ABC$, $A_1B_1C_1 = ABC$ et cette relation a lieu quels que soient les points A, B, C pris sur la parabole.

Si la parabole donnée est $y^2 - 2px = 0$, si $x = \frac{t_i^2}{2p}$, $y = t_i$ ($i = 1, 2, 3$) sont les coordonnées des points ABC, l'aire du triangle ABC est $\frac{(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)}{2p}$, les coordonnées des points $A_2\,B_2\,C_2$ sont $x = p + \frac{3t_i^2}{2p}$, $y = -\frac{t_i^3}{p^2}$, l'aire $A_2B_2C_2$ est égale à

$$\frac{3(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)}{2p^3}(t_1t_2 + t_2t_3 + t_1t_3),$$

$$\frac{A_2B_2C_2}{ABC} = \frac{3(t_1t_2 + t_2t_3 + t_1t_3)}{p^2}.$$

L'équation aux t des points d'intersection de l'hyperbole d'Apollonius d'un point x_0, y_0 avec la parabole étant

$$\frac{t^3}{2p} + t(p - x_0) - py_0 = 0,$$

on voit que $\dfrac{A_2 B_2 C_2}{ABC} =$ const. si x_0 est constant.

Remarque. — Étant donnée une conique quelconque, les points de Frégier de ces différents points sont sur une conique homothétique et concentrique à cette conique, le rapport des aires des triangles ABC, $A_1 B_1 C_1$ est donc constant.

Autres solutions par MM. Klug et Lemaire.

2177.

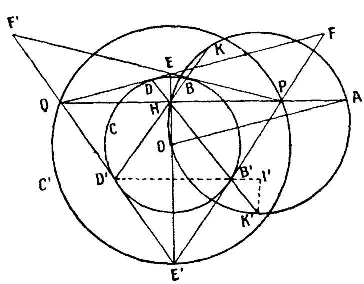
(1911, p. 96.)

On donne deux cercles concentriques C *et* C′ *et un point* A. *Une droite quelconque passant par* A *rencontre* C′ *en* P *et* Q. *Le lieu des sommets du quadrilatère formé par les quatre tangentes à* C *issues de* P *et* Q *se compose d'une conique et de deux droites.* E.-N. Barisien.

SOLUTION

Par M. Parrod.

Les tangentes PB′, QD′ du même côté que le centre O de la droite PQ se rencontrent en E′, les deux autres se rencontrent en E; désignons par F et F′ les deux autres points d'intersection.



La droite EE′ est un diamètre perpendiculaire sur PQ en H et les droites DB′, BD′ passant par H; les bissectrices des angles de ces deux cordes sont les diagonales EE′, PQ et leur angle BHB′ est constant, car l'arc BB′ est constant. Le point H décrit la circonférence de diamètre AO, en désignant par O le centre du cercle C, donc les cordes DB′ et BD′ rencontrent le cercle OA en deux points fixes K et K′. Les points F, F′ décrivent les polaires, dans le cercle C, des points K′, K.

La corde B′D′ est parallèle à PQ, abaissons K′I′ perpendiculaire sur B′D′, cette droite est aussi perpendiculaire sur DB en I; les angles K′B′I′, K′DI sont égaux et constants, I et I′ décrivent un cercle déduit du cercle C par une homothétie et une rotation amenant le point O au milieu de KK′, les cordes DB, D′B′ enveloppent une conique de foyers K, K′ et les points E, E′ décrivent sa polaire réciproque dans le cercle C.

Autre solution par M. Klug.

2178.

(1911, p. 96.)

On donne une ellipse E *et un point* P *sur le grand axe, et l'on considère une corde variable* PAB. *Le lieu des centres de similitude des cercles décrits sur* PA *et* PB *comme diamètres se compose du grand axe et d'une droite perpendiculaire au grand axe.* E.-N. Barisien.

SOLUTION

Par M. Parrod.

Plus généralement, supposons le point P quelconque. Le deuxième centre de similitude étant S, on a

$$SP^2 = SA\ SB.$$

S étant le milieu du segment PP′, le point P′ décrit la polaire du point P, d'où le lieu du point S.

(Le diamètre du point P ne fait pas partie du lieu.)

Autre solution par MM. Abramescu et Bouvaist.