

R. D'ADHÉMAR

**Principe de Dirichlet. La formule de Poisson**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 12  
(1912), p. 375-378

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1912\\_4\\_12\\_\\_375\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__375_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1912, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[D5c]

**PRINCIPE DE DIRICHLET. LA FORMULE DE POISSON;**

Par M. R. D'ADHÉMAR.

Lorsque se produit une puissante synthèse, comme celle de MM. Fredholm, Hilbert, etc., pour les problèmes de la Physique mathématique (à caractéristiques imaginaires), il est intéressant de *retrouver*, par la méthode nouvelle, les solutions anciennes relatives aux cas les plus simples.

Nous allons voir que, par la théorie des potentiels, et sans faire usage des transcendentes de M. Fredholm, on retrouve facilement la formule de Poisson.

Il s'agit, on le sait, de trouver la solution de l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

la fonction  $u$  étant donnée sur une *circonférence*. C'est le problème de Dirichlet.

Nous rappelons (1) que l'on résout le problème de Dirichlet *intérieure*, dans le plan, par un potentiel de *double couche*. Soit  $W_p$  ce potentiel, au point  $p$ ; on aura

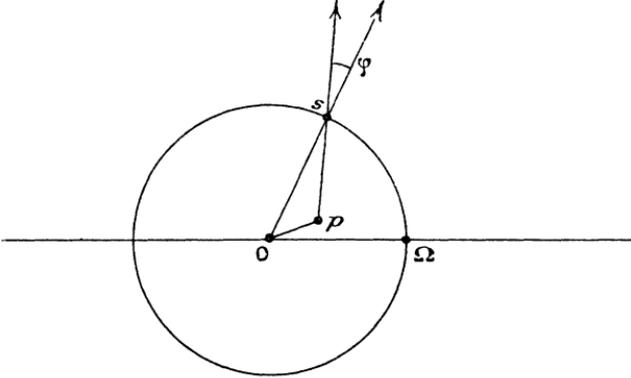
$$(1) \quad W_p = \int_0^L \nu_s \frac{\cos \varphi}{r_p} ds,$$

$L$  étant la longueur du contour donné;  $r_p$  la distance

---

(1) *Leçons sur les Principes de l'Analyse*, par l'auteur (Gauthier-Villars), t. I, Chap. VIII et Chap. IX. Voir aussi : O. D. KELLOGG, *Theorie der Integralgleichungen und der Dirichlet'schen Principals*, Göttingen, 1902.

du point  $p$  au point  $s$  sur le contour;  $\varphi$  étant l'angle de la droite  $r_p$  avec la normale au contour au point  $s$ ;  $\nu$  étant la densité;  $ds$  étant l'élément d'arc du contour.



La densité  $\nu_s$  est donnée par l'équation de Fredholm

$$(2) \quad \nu_s + \frac{1}{\pi} \int_0^L \frac{\cos \varphi}{r} \nu_\sigma d\sigma = \frac{W_i}{\pi} = \psi_s,$$

$W_i$  est la fonction donnée sur la frontière et  $r$  est la distance du point fixe  $\Omega$ , sur le contour, au point mobile  $s$ , sur ce même contour.

Si le contour est un cercle de rayon  $R$ , on a

$$\frac{\cos \varphi}{r} = \frac{R}{2} = \text{const.}$$

Dans ce cas, on a immédiatement  $\nu_s = \psi_s + A$ .  $A$  est une constante, que nous déterminons par identification, ce qui donne

$$(3) \quad A + \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi R} (\psi_\sigma + A) d\sigma = 0;$$

$A$  est donc connu, donc  $\nu_s$  est connu, et nous avons à calculer  $W_p$ , par la formule (1).

Le triangle  $Ops$  donne, en posant  $\overline{Op} = l$ , longueur donnée, puisque le point  $p$  est donné

$$l^2 = R^2 + r_p^2 - 2Rr_p \cos \varphi,$$

$$\frac{\cos \varphi}{r_p} = \frac{1}{2R} \left( 1 + \frac{R^2 - l^2}{r_p^2} \right).$$

On aura donc

$$(4) \quad W_p = \int_0^{2\pi R} (\psi_s + A) \left( 1 + \frac{R^2 - l^2}{r_p^2} \right) \frac{ds}{2R}.$$

Tenons compte de la relation (3); d'où

$$(5) \quad \int_0^{2\pi R} (\psi_s + A) \frac{ds}{2R} = - \frac{\pi A}{R^2}.$$

Maintenant, pour une densité *constante* et égale à  $A$ , nous aurions un potentiel double *constant*, dans le domaine intérieur <sup>(1)</sup>, ce qui donne

$$W'_p = \int A d\omega = 2\pi A.$$

Appliquant la formule (4), cela donnera

$$(6) \quad 2\pi A = \int_0^{2\pi R} A \left( 1 + \frac{R^2 - l^2}{r_p^2} \right) \frac{ds}{2R},$$

quel que soit le point *intérieur*  $p$ .

De là résulte, en posant  $W_i = F_s$ , fonction donnée <sup>(2)</sup>:

$$W_p = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \frac{R^2 - l^2}{r_p^2} F_s ds.$$

(1) *Leçons sur les Principes de l'Analyse*, par l'auteur, t. I, p. 218 ( $\omega$  est l'angle solide).

(2) Il suffit d'écrire :

$$\left( \psi_s + A \right) \left( 1 + \frac{R^2 - l^2}{r^2} \right) \equiv \left( \psi_s + A \right) + \psi_s \frac{R^2 - l^2}{r^2} + A \left( 1 + \frac{R^2 - l^2}{r^2} \right) - A$$

et d'utiliser les formules (5) et (6).

( 378 )

C'est la *formule de Poisson*. On pourra poser

$$ds = R d\theta,$$

$\theta$  étant l'arc de cercle, et

$$r_p^2 = R^2 + l^2 - 2Rl \cos(\theta - \alpha),$$

$l$  et  $\alpha$  étant les coordonnées polaires du point  $p$ .

---